

# Mecánica Cuántica

Semestre 2022-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Ayud: Alondra Jazmín Tapia de la Rosa



## Tarea 3

Entrega: 10/04/2020

### Ejercicio 1: Esquema de interacción

En clase discutimos los esquemas de Heisenberg y Schrödinger para describir la dinámica de un sistema. En el de Schrödinger los operadores son estáticos mientras los kets evolucionan en el tiempo y en el esquema de Heisenberg se toma en el enfoque opuesto. En este ejercicio desarrollarás el esquema de interacción que es un caso intermedio entre ambos.

Considera un sistema físico arbitrario, donde su Hamiltoniano es  $H_0(t)$  y su operador de evolución asociado  $U_0(t, t')$  con  $U_0(t, t) = \mathbb{1}$ .

a Muestra que la ecuación de Schrödinger implica que el operador de evolución cumple

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, t') = H_0(t) U_0(t, t').$$

### (Para incisos b y c)

Suponiendo que el sistema es perturbado por una “interacción”  $W(t)$  de tal modo que su Hamiltoniano total se convierte en

$$H(t) = H_0(t) + W(t)$$

El vector de estado en el esquema de interacción es  $|\psi_I(t)\rangle$ , que en términos del vector de estado en el esquema de Schrödinger es  $|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle$ .

b Muestra que la ecuación de evolución para  $|\psi_I(t)\rangle$  es

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = W_I(t) |\psi_I(t)\rangle,$$

donde  $W_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) W(t) U_0(t, t_0)$ .

c Explica cualitativamente por qué cuando la perturbación  $W(t)$  es mucho menor que  $H_0(t)$  la dinámica del vector  $|\psi_I(t)\rangle$  es mucho más lenta que la de  $|\psi_S(t)\rangle$ .

En estos dos incisos se muestra la utilidad del esquema de interacción: Conociendo la dinámica correspondiente a  $H_0(t)$ , en el esquema de interacción la ecuación de Schrödinger restante sólo involucra a  $W(t)$ .

**Ejercicio 2:** Estado de un espín

En clase hablamos del operador asociado al observable de espín  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$  donde, en la base de eigenvectores de  $S_z$  denotados por  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , las representaciones matriciales de las componentes son

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de estos operadores podemos obtener el observable de espín en una dirección arbitraria  $\mathbf{u}$  determinada por los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  por medio de

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = S_u = S_x \sin \theta \cos \varphi + S_y \sin \theta \sin \varphi + S_z \cos \theta$$

Muestra que

$$\begin{aligned} |+\rangle_u &= \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle \\ |-\rangle_u &= -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle \end{aligned}$$

son eigenvectores de  $S_u$ .

**Ejercicio 3:** Estados de oscilador armónico

Considera un oscilador armónico de masa  $m$  y frecuencia angular  $\omega$ . Su estado inicial es

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle,$$

donde  $|\varphi_n\rangle$  son los eigenvectores del Hamiltoniano con eigenvalor  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ .

- ¿Cuál es la probabilidad  $\mathcal{P}$  de que al medir la energía al tiempo  $t > 0$  obtengamos un resultado mayor que  $2\hbar\omega$ ? Cuando  $\mathcal{P} = 0$  ¿Qué coeficientes  $c_n$  son distintos de cero?
- De ahora en adelante, supongamos que sólo  $c_0$  y  $c_1$  son distintos de cero. Escribe la condición de normalización para  $|\psi(0)\rangle$  y el valor esperado  $\langle H \rangle$  en términos de  $c_0$  y  $c_1$ . Agregando el requisito de que  $\langle H \rangle = \hbar\omega$ , calcula  $|c_0|^2$  y  $|c_1|^2$ .
- Como el estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  está definido salvo por una fase global, podemos fijar a  $c_0$  como real y positivo. Si escribimos  $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$  y suponemos que  $\langle H \rangle = \hbar\omega$  y que  $\langle X \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ , calcula  $\theta_1$ .

**Ejercicio 4:** Estados coherentes

Usando la notación usual de oscilador armónico:

- a Muestra directamente que un estado coherente

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle,$$

con  $\alpha \in \mathbb{C}$  es un eigenvector del operador de descenso  $a$ .

- b Calcula el valor esperado de  $X$  y  $P$  si el sistema se encuentra en el estado coherente  $|\alpha\rangle$ .
- c Calcula el valor esperado de  $X^2$  y  $P^2$  si el sistema se encuentra en el estado coherente  $|\alpha\rangle$  y calcula  $\Delta X \Delta P$ .
- d Muestra que si un oscilador armónico inicia en un estado coherente  $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ , después de un tiempo  $t > 0$  el estado  $|\psi(t)\rangle$  seguirá siendo un estado coherente. Es decir, seguirá siendo un eigenvector de  $a$  pero con distinto eigenvalor. ¿Cuál es este nuevo eigenvalor?
- e Usa los resultados anteriores para obtener  $\langle X \rangle(t)$  y  $\langle P \rangle(t)$  para un oscilador armónico cuya condición inicial es un estado coherente.
- f Calcula el producto escalar  $\langle \alpha | \alpha' \rangle$  entre dos estados coherentes. ¿Forman los estados coherentes una base ortonormal?

**Ejercicio Extra 1 :** Estados estacionarios del oscilador armónico

+1

Considera un oscilador armónico cuántico con frecuencia  $\omega$  y masa  $m$ .

- a Si el sistema se encuentra en el estado base  $|\varphi_0\rangle$  ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula afuera de la región permitida clásicamente?  
Llegarás a una integral que no se puede resolver analíticamente usa el recurso que prefieras (web/programa/tabla) para calcularla.
- b Usa el operador de ascenso  $a^\dagger$  para encontrar una expresión para  $\varphi_1(x) = \langle x | \varphi_1 \rangle$  a partir de  $\varphi_0(x)$ .

**Ejercicio Extra 2** : Representación de momento

+1

Considera un oscilador armónico cuántico con frecuencia  $\omega$  y masa  $m$ .

- a Encuentra la función de onda en la representación de momento del estado base del oscilador armónico  $\varphi_0(p)$  usando  $a|\varphi_0\rangle = 0$ . Presenta tu respuesta de forma normalizada.
- b Usa el operador de ascenso  $a^\dagger$  para encontrar una expresión para  $\varphi_1(p) = \langle p|\varphi_1\rangle$  a partir de  $\varphi_0(p)$ .
- c ¿Cómo se comparan  $|\varphi_0\rangle$  y  $|\varphi_1\rangle$  en la representaciones  $x$  y  $p$ ?