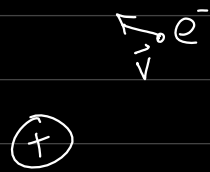


Espín del electrón:

Teoría de Pauli

- Evidencia experimental respecto a la existencia del espín

- Espectros atómicos (estructura fina)



→ en el M. de R. del e^- hay un campo magnético
→ Este campo magnético se acopla al momento magnético del e^- que resulta de su espín.

- Ecuación de Dirac $\Rightarrow$ espín sale naturalmente.
 ↑ ecuación relativista para el electrón.

- Interacción con campos magnéticos

$$H = - \underbrace{\vec{\mu}}_{\text{momento magnético}} \cdot \underbrace{\vec{B}}_{\text{campo magnético externo}}$$

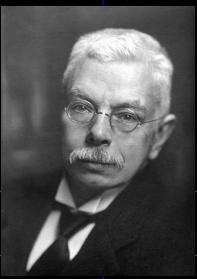
Magnetón de Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$

Momento magnético orbital $\vec{\mu}_L = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L}$

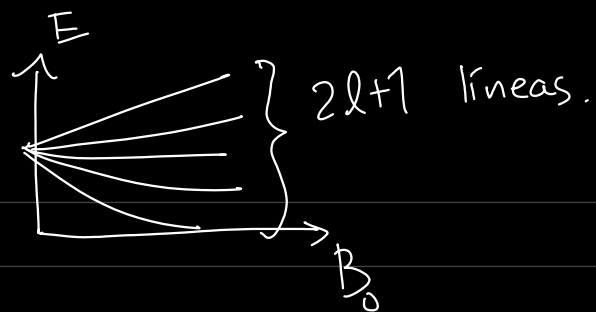
$$\text{Si } \vec{B} = B_0 \hat{e}_z \Rightarrow H = - \frac{\mu_B}{\hbar} B_0 L_z$$

Conocemos ya los e-vectores y e-valores de L_z

$$E_m = - \mu_B B_0 m \quad \text{para el e-vector } |l, m\rangle$$



Pieter Zeeman



efecto Zeeman

Como l es entero, deben ser un número impar de líneas pero para algunos elementos se observa un número par.
A esto se llama "efecto Zeeman anómalo".

¿Se acuerdan por qué dijimos que l debe ser entero?

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi + 2\pi)$$

Descripción cuántica de partículas con espín: teoría de Pauli

$$|\text{espacial}\rangle \otimes |\text{espín}\rangle$$

nuevo grado de libertad

i) Existe un observable $\vec{S}$ de espín el cual cumple las propiedades de un momento angular

$$[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

ii) Los operadores de espín actúan en un nuevo espacio $\mathcal{E}_s$.

- $\{S^2, S_z\}$ son CCO en $\mathcal{E}_s$
- $\mathcal{E}_s$ es el espacio generado por los e-vectores de S^2 y S_z , $|s, m_s\rangle$

iii) El estado completo de un electrón es un vector en el espacio

$$\mathcal{E} = \overset{\text{posición}}{\mathcal{E}_{\vec{r}}} \otimes \overset{\text{espín}}{\mathcal{E}_s}$$

∴ Observables de espín conmutan con observables de posición.

iv) El electrón tiene $s = \frac{1}{2}$ y su momento magnético es

$$\vec{\mu}_s = g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

razón giromagnética

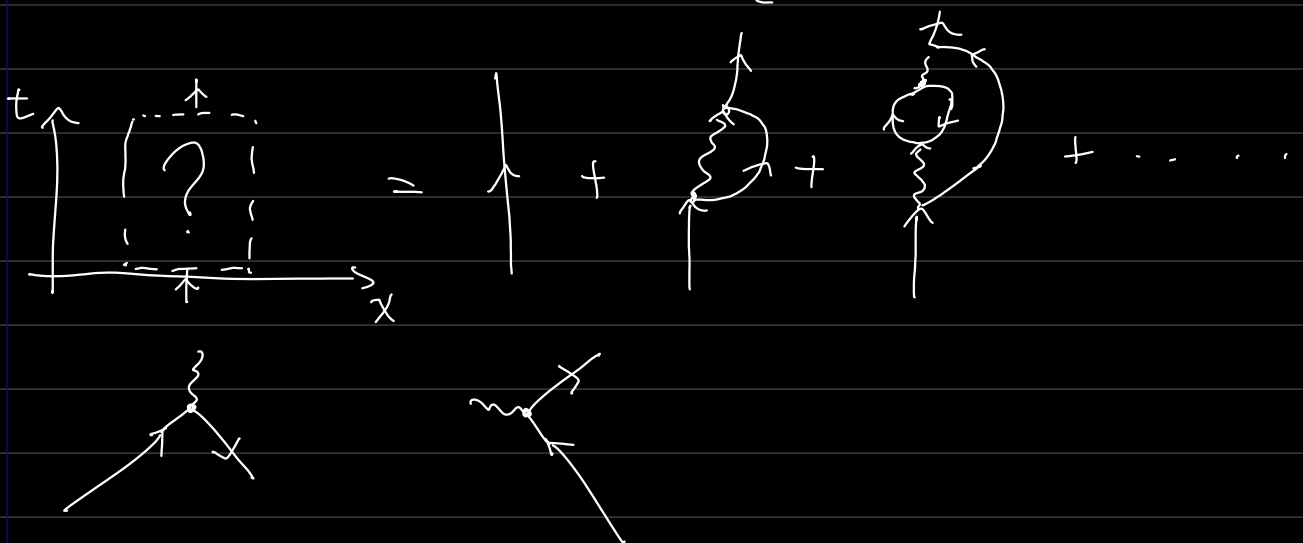
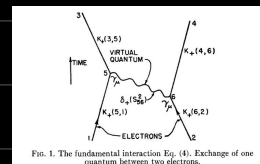
según Dirac $g_s = 2$

según experimento $g_s = 2.0023193043617(15)$

La electrodinámica cuántica predice un número parecido.

Diagramas de Feynman

↑ electrones
↓ positrones
~ fotones



Protón y neutrón también tienen $s = \frac{1}{2}$ pero g_p y g_n son distintos a g_e

→ El espín no tiene análogo clásico

Descripción de espín

Base $\{ |s=\frac{1}{2}, m_s=\frac{1}{2}\rangle = |+\rangle, |s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle \}$

$$S^2 |\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\pm\rangle \quad S_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$$

Estado general de espín

ket de espín ↗

$$|\chi\rangle = C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle$$

① $S_+ |+\rangle = 0$

② $S_- |+\rangle = \hbar |-\rangle$

③ $S_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle$

④ $S_- |-\rangle = 0$

$$S_{\pm} |s m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)} |s m_s \pm 1\rangle$$

$$S_- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \hbar \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{2}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$S_+ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \hbar \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} + 1)} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} (\underbrace{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z}_{\text{matrices de Pauli}}) \Rightarrow S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$$

con la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando $S_{\pm} = S_x \pm i S_y$

$$\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1}$$

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i \sigma_z$$

Base para espacio de matrices de 2×2
 $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \mathbb{1}_{2 \times 2}\}$

- Ahora juntamos los grados de libertad
 externos (de posición) e internos (espín).

- En E_r , el conjunto $\{X, Y, Z\}$ es un CCOC

→ En $E = E_r \otimes E_s$, $\{X, Y, Z\}$ ya no es un CCOC^{*}
^{*} Excepto si $s=0$.

¿Cuál es un CCOC en E ?

$$1. \{X, Y, Z, S^2, S_z\} \quad |\vec{r}, s, m_s^z\rangle$$

$$2. \{P_x, P_y, P_z, S^2, S_x\} \quad |\vec{p}, s, m_s^x\rangle$$

$$3. \{H, L^2, L_z, S^2, S_z\} \quad |n, l, m_l, s, m_s^z\rangle$$

Usando 1: kets $|\vec{r}\rangle \otimes |m_s\rangle = |\vec{r} m_s\rangle$ es e-vector de
 $\{\vec{R}, S^2, S_z\}$.

$$\langle \vec{r}' m_s' | \vec{r} m_s \rangle = \langle \vec{r}' | \vec{r} \rangle \langle m_s' | m_s \rangle$$

$$= \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \delta_{m_s', m_s}$$

$$\sum_{m_s} \int d^3r |\vec{r} m_s\rangle \langle \vec{r} m_s| = \int d^3r |\vec{r} +\rangle \langle \vec{r} +| + \int d^3r |\vec{r} -\rangle \langle \vec{r} -| = \mathbb{1}_{rs}$$

¿Cómo se ve un estado representado en esta base?

$$|\psi\rangle = \sum_{m_s} \int d^3r |\vec{r} m_s\rangle \langle \vec{r} m_s | \psi \rangle$$

función de onda $\langle \vec{r} m_s | \psi \rangle = \psi_{m_s}(\vec{r})$

$\Rightarrow$ Hay $\psi_+(\vec{r})$ y $\psi_-(\vec{r})$

Se le llama espinor, función de onda espinorial

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vector de dim 2} \\ \text{cuyas componentes} \\ \text{son funciones de } \vec{r} \end{array}$$

No siempre se puede $|\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{espacial} & \text{espinorial} \\ E_{\vec{r}} & E_s \end{array}$

cuando sí se puede

$$[\psi](\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

$$|\varphi\rangle = \int d^3r \varphi(\vec{r}) |\vec{r}\rangle$$

$$|\chi\rangle = C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle$$

$$[S_x] = \mathbb{1}_{\vec{r}} \otimes S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[S_x][\psi](\vec{r}) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_-(\vec{r}) \\ \psi_+(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$[X] = X \otimes \mathbb{1}_s = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$[P_x] = P_x \otimes \mathbb{1}_s = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$[L_z S_z] = L_z \otimes S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

Hamiltoniano de un electrón con espín en un campo electromagnético

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + qU(\vec{r}, t) - \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$$

potencial
vectorial E.M.

potencial escalar
eléctrico

momento
magnético

$$\vec{\mu}_s \propto \vec{S}$$