Producto tensorial III

$$\left.\begin{array}{l}|\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle\end{array}\right\} \rightarrow |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

e-valores y e-vectores

En los espacios $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

$A : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$; $B : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$

$\downarrow$ $\downarrow$

$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{1}_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ $\tilde{B} = \mathbb{1}_1 \otimes B : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$

$A|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle$ $B|\beta_m\rangle = b_m|\beta_m\rangle$

$\tilde{C} \equiv \tilde{A} + \tilde{B} \Rightarrow \tilde{C}|\gamma_{nm}\rangle = c_{nm}|\gamma_{nm}\rangle$

$c_{nm} = a_n + b_n$

Aspectos de Conjuntos Completos de Operadores que conmutan (CCOC) y producto tensorial

Recordatorio:

Def

Un Conjunto Completo de Operadores que Conmutan (CCOC) $A_1, A_2, \ldots, A_N$ cumple que

i) Conmutan por pares ($[A_i, A_j] = 0$)

ii) Al especificar los e-valores de cada operador se determina de forma unívoca un e-vector.
(salvo por cte multiplicativa).

Recordando de 23/02/2022

- Si $\{A\}$ operadores en $\mathcal{E}_1$ es un CCOC
- Si $\{B, C\}$ operadores en $\mathcal{E}_2$ es un CCOC.

¿Qué pasaría en $\mathcal{E}$?

En $\mathcal{E}_1$

$$A|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle$$

Como $\{A\}$ es un CCOC, $\{|\alpha_n\rangle\}$ son una base de $\mathcal{E}_1$

En $\mathcal{E}_2$

$$B|\varphi_{pq}\rangle = b_p|\varphi_{pq}\rangle$$
$$C|\varphi_{pq}\rangle = c_q|\varphi_{pq}\rangle$$

Si sólo medimos B hay una ambigüedad respecto cuál valor de q se tiene.

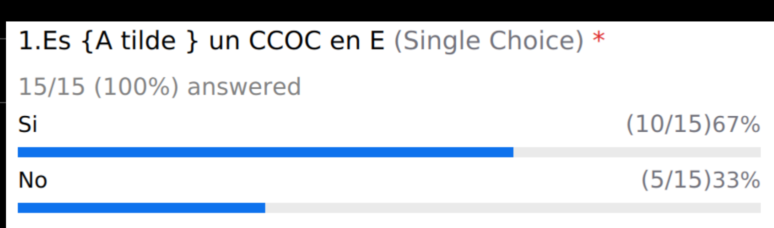
Los $\{|\varphi_{pq}\rangle\}$ son una base de $\mathcal{E}_2$

En el espacio grande $\mathcal{E}$ definimos

$$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{1}_2 \qquad \tilde{B} = \mathbb{1}_1 \otimes B \qquad \tilde{C} = \mathbb{1}_1 \otimes C$$

$|\alpha_n\rangle \otimes |\varphi_{pq}\rangle$ es una base de $\mathcal{E}$.

¿$\{\tilde{A}\}$ es un CCOC en $\mathcal{E}$?



$\{\tilde{A}\}$ no es un CCOC en $\mathcal{E}$.

Al medir $\tilde{A}$ en $\mathcal{E}$

$$\tilde{A}\,|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle = a_n\,|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle$$

No importa el valor de p y q, $|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle$ es un e-vector de $\tilde{A}$ con e-valor a_n.

$\therefore$ Medir $\tilde{A}$ no determina el e-vector.

Mientras que en $\mathcal{E}_1$ para cada a_n habría un solo $|\alpha_n\rangle$, ahora hay tantos e-vectores asociados a a_n como valores posibles de p, q.

$\{\tilde{A}\}$ no es un CCOC pero $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ sí es un CCOC.

$$\tilde{A}\,|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle = a_n\,|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle$$
$$\tilde{B}\,|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle = b_p\,|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle$$
$$\tilde{C}\,|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle = c_q\,|\alpha_n\, \varphi_{pq}\rangle$$

Sólo hay un e-vector cuyos e-valores sean a_n, b_p, c_q (ie. los e-valores determinan por completo al e-vector por lo que es un CCOC).

En general, unir CCOC en $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ obtenemos un CCOC en $\mathcal{E}$.

Aplicaciones de producto tensorial.

- Espacios de una y más dimensiones

- Hemos hablado de $\mathcal{E}_x$ con base $\{|x\rangle\}$
  tal que $X|x\rangle = x|x\rangle$
- También de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ con base $\{|\vec{r}\rangle\}$
  tal que $\vec{R}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle \longrightarrow X|x,y,z\rangle = x|x,y,z\rangle$

$$Y|x,y,z\rangle = y|x,y,z\rangle$$
$$Z|x,y,z\rangle = z|x,y,z\rangle$$

¿Cómo se relacionan $\mathcal{E}_x$ y $\mathcal{E}_{\vec{r}}$?

$$\mathcal{E}_{\vec{r}} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z \; ; \; |\vec{r}\rangle = |x,y,z\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$$

$\{X\}$ es un CCOC en $\mathcal{E}_x$ pero no en $\mathcal{E}_{\vec{r}}$

$\{X, Y, Z\}$ es un CCOC en $\mathcal{E}_{\vec{r}}$
$\{X, P_y, Z\}$ " " " " "
$\{X, P_y, P_z\}$ " " " " "

- Sistemas de varias partículas

- Dos partículas sin espín:
  Generalizar la función de onda

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2$ densidad de probabilidad de encontrar a la partícula 1 en $d^3r_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ y a la partícula 2 en d^3r_2

$$\mathcal{E}_{r_1, r_2} = \mathcal{E}_{r_1} \otimes \mathcal{E}_{r_2}$$

No siempre $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

Pero, cuando sí se puede

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \psi \rangle = \langle \vec{r}_1 | \psi_1 \rangle \langle \vec{r}_2 | \psi_2 \rangle$$
$$= \psi_1(\vec{r}_1)\, \psi_2(\vec{r}_2)$$

En este caso decimos que no hay correlación

$$\int |\psi_1(\vec{r}_1)|^2 |\psi_2(\vec{r}_2)|^2 \, d^3 r_2 = |\psi_1(r_1)|^2$$

Dos espines

Sistema 1: Base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

Sistema 2: Base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

Partícula 1 Partícula 2

Sistema compuesto, Base: $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$

Teoría de Pauli: descripción del espín.

- Hemo considerado al electrón como
  - partícula puntual
  - masa m_e
  - carga $-e$
  - tiene 3 grados de libertad de posición
  - Estado $\psi(x, y, z)$

- Calculamos el espectro del átomo de hidrógeno
  → faltaba incluir efectos relativistas.

- Ecuación de Dirac es una ecuación cuántica relativista
  → El espín sale naturalmente

- El espín fue descubierto experimentalmente.

- Teoría de Pauli es una versión de la ec de Schrödinger que incluye al espín.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

Evidencia experimental del espín

- Espectros atómicos.

- La teoría que tenemos difiere de las mediciones (estructura fina).

- Interacción de átomos con campos magnéticos (Efecto Zeeman)

Momento magnético $\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L}$

magnetón de Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$

momento angular orbital.

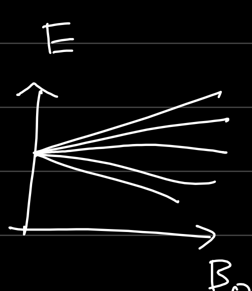
interacción electrón con campo $\vec{B}$ estático $\rightarrow$ $H_Z = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\frac{\mu_B}{\hbar} B_o L_z$

eligiendo $\vec{B} = B_o \hat{e}_z$

¿Cuáles son los e-valores y e-vectores de H_Z?

e-vectores $|l, m\rangle$

e-valores $-\mu_B B_o m$ $\Rightarrow$ Para $l=2$, $m=-2,\dots,2$



Dado l, hay $2l+1$ niveles distintos pero no siempre se ve un número impar.

Falta tomar en cuenta al espín!