Producto tensorial II

Espacios $\quad \overset{\dim \mathcal{E} = N_1 N_2}{\mathcal{E}} = \overset{\dim \mathcal{E}_1 = N_1}{\mathcal{E}_1} \otimes \overset{\dim \mathcal{E}_2 = N_2}{\mathcal{E}_2}$

Vectores $\quad |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \underset{\text{notación}}{=} |\varphi\rangle|\psi\rangle \underset{\text{notación}}{=} |\varphi\psi\rangle$

Producto tensorial

- Lineal respecto a suma de vectores y multiplicación por escalares
- Si $\{|v_i\rangle\}$ base de $\mathcal{E}_1$
  $\{|u_j\rangle\}$ base de $\mathcal{E}_2$
  $\Rightarrow \{|v_i\rangle \otimes |u_j\rangle\}$ base de $\mathcal{E}$

- Si $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1$, $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \in \mathcal{E}$
- Pero $|\chi\rangle \in \mathcal{E} \not\Rightarrow |\chi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ con $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1, |\psi\rangle \in \mathcal{E}_2$

Producto tensorial en notación matricial

$$|\varphi\rangle = \sum_i a_i |v_i\rangle \quad ; \quad |\psi\rangle = \sum_j b_j |u_j\rangle$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \sum_{ij} a_i b_j |v_i\rangle \otimes |u_j\rangle$$

Ejemplo:

Base de $\mathcal{E}_1 = \{|1\rangle, |2\rangle\}$

Base de $\mathcal{E}_2 = \{|a\rangle, |b\rangle\}$

$$|\varphi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle \in \mathcal{E}_1 \quad ; \quad |\psi\rangle = \gamma|a\rangle + \delta|b\rangle \in \mathcal{E}_2$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \alpha\gamma|1a\rangle + \beta\gamma|2a\rangle + \delta\alpha|1b\rangle + \delta\beta|2b\rangle$$

eligiendo la base en el orden $\{|1a\rangle, |1b\rangle, |2a\rangle, |2b\rangle\}$ $= \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ \beta\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \gamma\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \delta\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

las bases tienen distinto orden en cada caso.

Producto escalar en $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

Si $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \in \mathcal{E}_1$; $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle \in \mathcal{E}_2$

$$\left(\langle\varphi_1| \otimes \langle\psi_1|\right)\left(|\varphi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle\right) =$$

$$\langle \varphi_1 \, \psi_1 | \varphi_2 \, \psi_2 \rangle = \underbrace{\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle}_{\mathcal{E}_1} \underbrace{\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle}_{\mathcal{E}_2}$$

Definición

Ejemplo

$$\langle 1a | 2b \rangle = \langle 1 | 2 \rangle \langle a | b \rangle$$

Ojo: $\langle 1 | b \rangle$ o $\langle 2 | b \rangle$ no tiene sentido pues $|1\rangle$ y $|2\rangle$ pertenecen a un espacio distinto que el de $|b\rangle$.

Producto tensorial de operadores

Consideremos $A: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1$ y $B: \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ operadores lineales.

<u>Definimos</u> La extensión de A a $\mathcal{E}$ es $\tilde{A}$ y actúa así:

$$\left(\text{Si } |\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1 \quad \text{y} \quad |\psi\rangle \in \mathcal{E}_2\right)$$

$$\tilde{A}\left(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle\right) = \left(A|\varphi\rangle\right) \otimes |\psi\rangle$$

Pueden verificar que $\tilde{A}$ es un operador lineal $\tilde{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

Análogamente definimos $\tilde{B}$ la extensión de B a $\mathcal{E}$

(A podría ser el operador de posición para una partícula y B para otra partícula).

Definimos el producto tensorial de A y B como el operador $A \otimes B$ que se comporta así
(Si $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_2$)

$$(A \otimes B)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = (A|\varphi\rangle) \otimes (B|\psi\rangle)$$

- Podemos escribir la extensión de A en $\mathcal{E}$ como

$$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{1}_2$$

$\mathbb{1}_2 : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$
identidad

$$\tilde{A}(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = (A|\varphi\rangle) \otimes (\mathbb{1}_2|\psi\rangle) = (A|\varphi\rangle) \otimes |\psi\rangle$$

Por abuso de notación

$$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{1}_2 = A$$
$$\tilde{B} = \mathbb{1}_1 \otimes B = B$$

Ejemplo del abuso de notación:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V(X_1) + V(X_2) + V(X_1 - X_2)$$

$$= \underbrace{\left[\frac{P_1^2}{2m} + V(X_1)\right]}_{\text{opera en } \mathcal{E}_1} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_2}_{} + \underbrace{\mathbb{1}_1}_{} \otimes \underbrace{\left[\frac{P_2^2}{2m} + V(X_2)\right]}_{\text{opera en } \mathcal{E}_2} + \underbrace{V(X_1 - X_2)}_{\text{opera en } \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2}$$

Conmutadores

$$- [\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} = (A \otimes \mathbb{1}_2)(\mathbb{1}_1 \otimes B) - (\mathbb{1}_1 \otimes B)(A \otimes \mathbb{1}_2)$$
$$= (A\mathbb{1}_1) \otimes (\mathbb{1}_2 B) - (\mathbb{1}_1 A) \otimes (B \mathbb{1}_2)$$
$$= A \otimes B - A \otimes B = 0$$

$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{1}_2$, $\tilde{B} = \mathbb{1}_1 \otimes B$

$A \in \mathcal{E}_1$, $B \in \mathcal{E}_2$

$\therefore$ Operadores de distintos espacios siempre conmutan

ejemplito

$$[X_1, P_2] = [X_1 \otimes \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_1 \otimes P_2] = 0$$

Operadores de kets-bras

Si $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \in \mathcal{E}_1$; $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle \in \mathcal{E}_2$

$$|\varphi_1 \psi_1\rangle\langle\varphi_2 \psi_2| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Se interpreta como $\left(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|\right) \otimes \left(|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\right)$

Ejemplo

$$A = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$A : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1$$

$$B = |a\rangle\langle a| \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} a & b \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \end{array}$$

$$\tilde{A}|1a\rangle = (A \otimes \mathbb{1}_2)|1a\rangle = (A|1\rangle) \otimes |a\rangle = |2a\rangle$$

$$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{1}_2 = \left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right) \otimes \left(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right)$$

$$= |1a\rangle\langle 2a| + |2a\rangle\langle 1a| + |1b\rangle\langle 2b| + |2b\rangle\langle 1b|$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1a & 2a & 1b & 2b \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 1b \\ 2b \end{array} \end{array}$$

$$\| $$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

$$C = \sum C_{ij} |i\rangle\langle j|$$

fila columna

$$\langle 1a| C |2b\rangle = C_{1a,2b}$$

$$\mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \to \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbb{1}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_1 \end{pmatrix}$$

¿Que pasa con los e-valores y e-vectores y el producto tensorial?

$$\underset{\mathcal{E}_1}{A}|\alpha_n^i\rangle = \underset{\substack{\text{eigenvalor}\\ \text{de } A}}{a_n}|\alpha_n^i\rangle \qquad i = 1, \ldots, g_n$$

eigenvector de A

degeneración

de veces que se repite el e-valor a_n

Notemos que $|\alpha_n^i\rangle|\psi\rangle$ es e-vector de $\tilde{A}$

$$\underbrace{\tilde{A}}_{\text{op}}\underbrace{|\alpha_n^i\rangle|\psi\rangle}_{\text{vector}} = (A|\alpha_n^i\rangle)|\psi\rangle = \underbrace{a_n}_{\text{escalar}}\underbrace{|\alpha_n^i\rangle|\psi\rangle}_{\text{mismo vector}}$$

- El espectro de $\tilde{A}$ es el mismo que el de A
- Si A es observable, $\tilde{A}$ es observable (el espectro es real)
- Si a_n tiene degeneración g_n en $\mathcal{E}_1$, tiene degeneración $g_n \dim \mathcal{E}_2$ en $\mathcal{E}$.

- Eigenvalores de $\tilde{C} \equiv \tilde{A} + \tilde{B} = A \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes B$

$$A|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle$$
$$B|\beta_m\rangle = b_m|\beta_m\rangle$$

- $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ comutan $\rightarrow \exists$ base de e-vetores comunes a $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$.

- De hecho $|\alpha_n \beta_m\rangle$ es e-vector común

$$\tilde{A}|\alpha_n\beta_m\rangle = a_n|\alpha_n\beta_m\rangle \; ; \; \tilde{B}|\alpha_n\beta_m\rangle = b_m|\alpha_n\beta_m\rangle$$

$$\tilde{C}|\alpha_n\beta_m\rangle = (a_n + b_n)|\alpha_n\beta_m\rangle$$

$\therefore$ Los e-valores de $\tilde{C}$ son la suma de e-valores de A y B.

Ejemplo

$$H = \underbrace{\frac{p_1^2}{2m} + V(\vec{r}_1)}_{\tilde{A}} + \underbrace{\frac{p_2^2}{2m} + V(\vec{r}_2)}_{\tilde{B}}$$

$$E_{nm} = \underset{\text{partícula 1}}{E_n} + \underset{\text{partícula 2}}{E_m}$$