También le llaman producto de Kronecker

Producto tensorial:

Sistemas cuánticos compuestos

- ¿Cómo relacionar los espacios de estados en problemas de 1D y 3D?

- Si tenemos dos sistemas S_1 y S_2 ¿Cómo es el espacio de estados del sistema total compuesto por S_1 y S_2?

Definición: Producto tensorial

Si $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son espacios de Hilbert de dimensión N_1 y N_2 (finita o infinita), el **producto tensorial**, **de los espacios** es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$$

De tal forma que si $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_2$ el **producto tensorial de los vectores es**

$$\overbrace{|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle} \in \mathcal{E}$$

es un vector

Con las siguientes propiedades

1) Es lineal respecto a multiplicación por escalares.

$$(\lambda|\varphi\rangle) \otimes |\psi\rangle = \lambda(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle)$$
$$|\varphi\rangle \otimes (\mu|\psi\rangle) = \mu(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle)$$

2) Distribuye sumas de vectores.

$$|\varphi\rangle \otimes (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = |\varphi\rangle \otimes |\psi_1\rangle + |\varphi\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$
$$(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) \otimes |\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\psi\rangle + |\varphi_2\rangle \otimes |\psi\rangle$$

3) Si $\{|u_i\rangle\}$ es base de $\mathcal{E}_1$ y $\{|v_j\rangle\}$ es base de $\mathcal{E}_2$.

$\{|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle\}$ es base de $\mathcal{E}$.

$$\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}_1 \cdot \dim \mathcal{E}_2$$

Componentes de producto tensorial de vectores

Para $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_2$ arbitrarios

$$|\varphi\rangle = \sum_{i\in I} a_i\, |u_i\rangle \quad ; \quad |\psi\rangle = \sum_{j\in J} b_j |v_j\rangle$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} a_i b_j\, |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$$

$\therefore$ Las componentes del producto tensorial de dos vectores es el producto de las componentes

Nota importante:

$\exists$ vectores en $\mathcal{E}$ que no se pueden escribir como producto tensorial de vectores en $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$.

Ejemplo: Base de $\mathcal{E}_1$: $\{|1\rangle, |2\rangle\}$

Base de $\mathcal{E}_2$: $\{|a\rangle, |b\rangle\}$

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle)$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2} \overbrace{(|1\rangle + |2\rangle)}^{\in \mathcal{E}_1} \otimes \overbrace{(|a\rangle + |b\rangle)}^{\in \mathcal{E}_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(|1\rangle \otimes |a\rangle + |1\rangle \otimes |b\rangle + |2\rangle \otimes |a\rangle + |2\rangle \otimes |b\rangle\right)$$

Notación

$$= \frac{1}{2}\left(|1a\rangle + |1b\rangle + |2a\rangle + |2b\rangle\right)$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = |\varphi\rangle |\psi\rangle = |\varphi, \psi\rangle = |\varphi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$$

Base de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ $\{|1a\rangle, |1b\rangle, |2a\rangle, |2b\rangle\}$

¿Cuál estado de $\mathcal{E}$ no se puede escribir como $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ con $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1a\rangle + |2b\rangle\right) \neq |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

estado enredado

Otro ejemplo de producto tensorial

$$|\varphi\rangle = |1\rangle \quad ; \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle + |b\rangle\right)$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle + |b\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle \otimes |a\rangle + |1\rangle \otimes |b\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1a\rangle + |1b\rangle\right)$$

Otro ejemplo $|\varphi\rangle = |2\rangle \quad ; \quad |\psi\rangle = |a\rangle$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = |2\rangle \otimes |a\rangle = |2a\rangle$$

En notación de componentes de vectores:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{E}_1 = 3 \qquad \dim \mathcal{E}_2 = 2 \qquad \dim \mathcal{E} = 3 \cdot 2 = 6$

o bien

$$= \begin{pmatrix}0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

se ven diferentes porque la base tiene un orden distinto. en cada caso

Estados de Bell (para espines)

Sistema 1 — Sistema 2

$$\frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

estado enredado

$j = \frac{1}{2} \rightarrow -j \leq m \leq j$

$m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} = \downarrow, \uparrow$

Einstein-Poddlsky-Rosen

Paradoja EPR

Def

Un **estado enredado** es aquel que no puede escribirse como $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$.

Complejidad cuántica.

Sistema de 2 niveles (2 estados)

- Clásico (moneda, bit, etc...)

¿Cuánta informacion se requiere para especificar el estado de n sistemas de 2 niveles clásicos?

(A S A A S); (1 0 1 1 0)

Se requieren n bits para especificar el estado.

- Cuántico (qubit, spin)

- La base para describir el estado de un sistema es $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

¿Cuánta informacion se requiere para especificar el estado de n sistemas de 2 niveles ~~clásicos~~ cuánticos? 2^n

Para 2 qubits Base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

En notación vectorial un estado arbitrario tiene la forma $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$

4 números determinan el estado.

∴ La complejidad de describir n sistemas de 2 niveles escala como n para el caso clásico y 2^n para el cuántico.

Relación de sistemas 1D y 3D

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{p_x^2}{2m} \quad ; \quad H = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2+y^2+z^2) + \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$|n\rangle \qquad\qquad\qquad\qquad |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \otimes |n_z\rangle$$