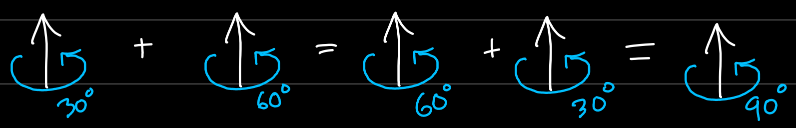
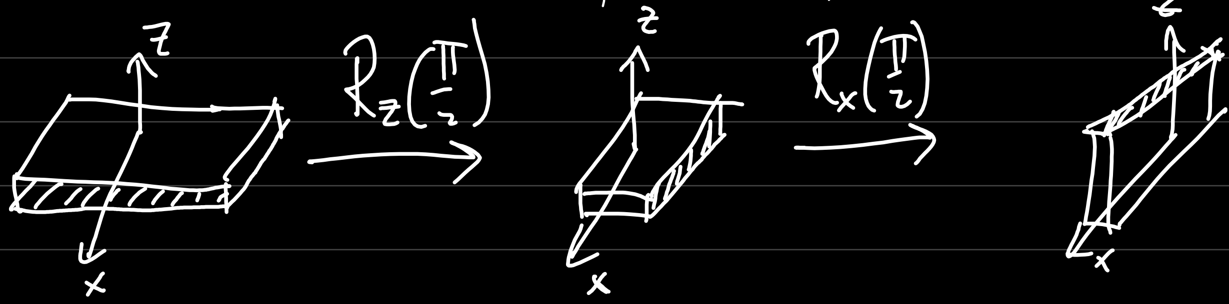
Momento angular VI

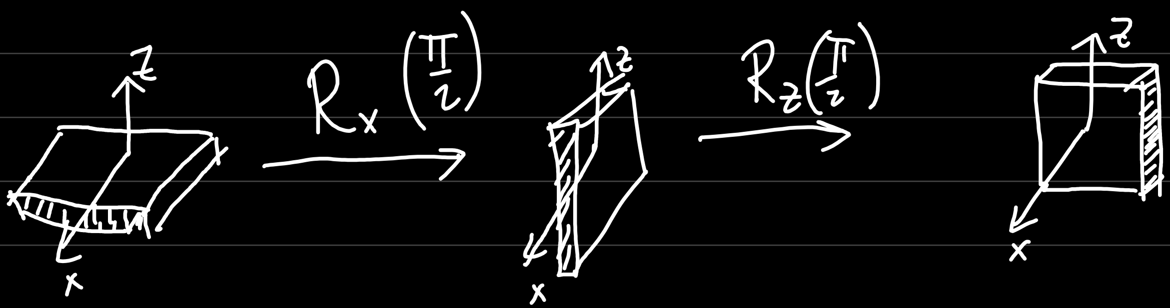
→ Rotaciones respecto a un mismo eje conmutan



→ Rotaciones respecto a distintos ejes NO conmutan

Consideremos $R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)$





- Si representamos $R_x(\phi)$ y $R_z(\phi)$ con matrices esperaríamos que no conmuten.

vector rotado

{matriz de rotación

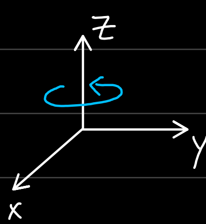
{vector de entrada

→ $\vec{v}\,' = R\,\vec{v}$; $RR^T = R^T R = \mathbb{1}$

(preservan norma)

$(\ \|\vec{v}\,'\| = \|\vec{v}\|\ )$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Para rotaciones por ángulos arbitrariamente pequeños ε

$$R_z(\varepsilon) \approx \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varepsilon) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon^2/2 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\varepsilon) \approx \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1-\varepsilon^2/2 \end{pmatrix}$$

Conmutador de rotaciones infinitesimal

$$R_x(\varepsilon) R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1-\frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

tirando términos de orden mayor que ε^2

$$R_y(x) R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\varepsilon^2) - \mathbb{1}$$

$$= R_z(\varepsilon^2) - R_{\hat{n}}(0)$$

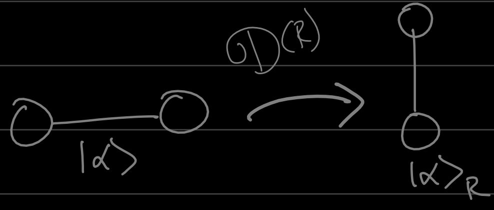
$(R_{\hat{n}}(0) = \mathbb{1})$

A segundo orden de ε, $R_x(\varepsilon)$ y $R_y(\varepsilon)$ no conmutan pero a primer orden sí.

Rotaciones infinitesimales en mecánica cuántica

Si R es una operación de rotación, le asociamos un operador $\mathcal{D}(R)$ tal que para un ket arbitrario $|\alpha\rangle$ obtenemos

$$\underbrace{|\alpha\rangle_R}_{\text{ket rotado}} = \mathcal{D}(R)\underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{ket original}}$$



- R es una rotación que actúa sobre vectores en $\mathbb{R}^3$
- $\mathcal{D}(R)$ es un operador que actúa sobre vectores en el espacio de Hilbert de estados $|\alpha\rangle$.

$$\boxed{\text{¿Qué forma tiene } \mathcal{D}(R)\text{?}}$$

Operadores similares.

traslación

Tb. **translación.**

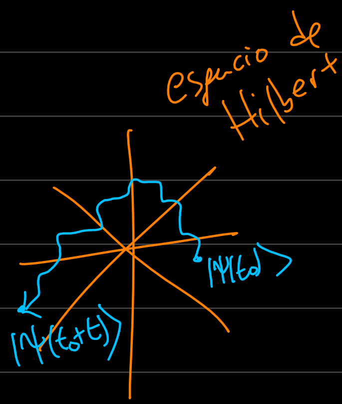
Del lat. *translatio, -ōnis.*

- Operador de translación temporal
  traslación

$$|\psi(t_0+t)\rangle = \underbrace{e^{-iHt/\hbar}}_{U(t)}|\psi(t_0)\rangle$$

→ H generador de traslaciones temporales

→ Para tiempos infinitesimales



$$U(\varepsilon) = \mathbb{1} - \frac{iH\varepsilon}{\hbar}$$

$$|\psi(t_0+t)\rangle = \left(\mathbb{1} - \frac{iHt}{\hbar}\right)|\psi(t_0)\rangle$$
$$= |\psi(t_0)\rangle - \frac{iHt}{\hbar}|\psi(t_0)\rangle$$

- Traslaciones espaciales

$$X|x\rangle = x|x\rangle \qquad \vec{R}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle$$

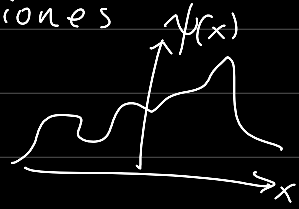
en 1D — en 3D

$$T(x_0)|x\rangle = |x_0 + x\rangle$$

$$T(x_0) = e^{-\frac{i x_0 P}{\hbar}} \qquad \left(\text{en 3D} \quad T(\vec{r}_0) = e^{-\frac{i\vec{r}_0\cdot\vec{P}}{\hbar}}\right)$$

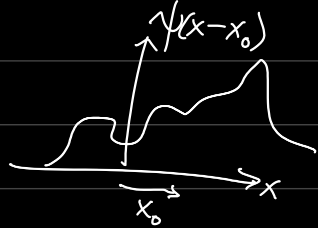
escalar — operador

→ P funge como generador de traslaciones espaciales.



Sabemos que $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$

$\langle x|T(x_0)|\psi\rangle$ debería de ser $\psi(x-x_0)$



$$\langle x|T(x_0)|\psi\rangle = \langle x|e^{-ix_0P/\hbar}|\psi\rangle$$

$\langle x|P|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle$

$$= \langle x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ix_0P/\hbar)^n}{n!}|\psi\rangle$$

$$= \langle x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ix_0P/\hbar)^n}{n!}|\psi\rangle$$

$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x_0\frac{d}{dx}\right)^n}{n!}\langle x|\psi\rangle$$

$$= \left[1 - x_0\frac{d}{dx} + \frac{1}{2!}x_0^2\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{3!}x_0^3\frac{d^3}{dx^3} + \dots\right]\psi(x)$$

$$= \psi(x) + \psi'(x)(-x_0) + \frac{1}{2!}\psi''(x)(-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\psi'''(x)(-x_0)^3 + \dots$$

Serie de Taylor

$$\overset{\downarrow}{=} \psi(x-x_0)$$

$\therefore$ $T(x_0)$ tiene el efecto deseado.

Propiedades de $T(x)$

$$T(x_1)\,T(x_2) = e^{-ix_1 P/\hbar}\, e^{-ix_2 P/\hbar} = e^{-i(x_1+x_2)P/\hbar} = T(x_1+x_2)$$

$\rightarrow$ Traslación infinitesimal

$$T(\varepsilon) = \mathbb{1} - \frac{i\varepsilon P}{\hbar}$$

operador generador de traslaciones espaciales

$\rightarrow$ Evolución temporal infinitesimal

$$U(\varepsilon) = \mathbb{1} - \frac{iH\varepsilon}{\hbar}$$

operador generador de traslaciones en el tiempo

$\rightarrow$ Para rotaciones infinitesimales

$$\mathcal{D}_{\hat{n}}(d\phi) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\, d\phi \overset{\text{para } \hat{n}=\hat{z}}{=} \mathbb{1} - \frac{iJ_z}{\hbar}\, d\phi$$

eje de rotación

ángulo infinitesimal de rotación

Nota: esta podría ser la definición de momento angular $\vec{J}$. No requiere $\vec{r}\times\vec{p}$ (Sakurai Capítulo 3).

Para rotaciones no infinitesimales.

$$\mathcal{D}_z(\phi) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_z\left(\frac{\phi}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{iJ_z}{\hbar}\frac{\phi}{n}\right)^n = e^{-iJ_z\phi/\hbar}$$

$$= \mathbb{1} - \frac{iJ_z\phi}{\hbar} - \frac{J_z^2\phi^2}{2!\hbar^2} + \dots$$

$\mathcal{D}(R)$ debe tener las propiedades de grupo que tiene R

Identity: $$R\cdot 1 = R \Rightarrow \mathscr{D}(R)\cdot 1 = \mathscr{D}(R)$$

Closure: $$R_1 R_2 = R_3 \Rightarrow \mathscr{D}(R_1)\mathscr{D}(R_2) = \mathscr{D}(R_3)$$

Inverses: $$RR^{-1} = 1 \Rightarrow \mathscr{D}(R)\mathscr{D}^{-1}(R) = 1$$
$$R^{-1}R = 1 \Rightarrow \mathscr{D}^{-1}(R)\mathscr{D}(R) = 1$$

Associativity: $$R_1(R_2R_3) = (R_1R_2)R_3 = R_1R_2R_3$$
$$\Rightarrow \mathscr{D}(R_1)[\mathscr{D}(R_2)\mathscr{D}(R_3)]$$
$$= [\mathscr{D}(R_1)\mathscr{D}(R_2)]\mathscr{D}(R_3)$$
$$= \mathscr{D}(R_1)\mathscr{D}(R_2)\mathscr{D}(R_3).$$

Retomando la relación de conmutación de las rotaciones infinitesimales.

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = R_z(\varepsilon^2) - R_{\hat{n}}(0)$$

Para operadores $\mathcal{D}(R)$ esto se ve como

$$\mathcal{D}_x(\varepsilon)\mathcal{D}_y(\varepsilon) - \mathcal{D}_y(\varepsilon)\mathcal{D}_x(\varepsilon) = \mathcal{D}_z(\varepsilon^2) - \mathbb{1}$$

$$\left(\mathbb{1} - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\left(\mathbb{1} - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) - \left(\mathbb{1} - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\left(\mathbb{1} - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)$$

$$= \left(\cancel{\mathbb{1}} - \frac{iJ_z\varepsilon^2}{\hbar}\right) - \cancel{\mathbb{1}}$$

Los términos $\mathbb{1}$ y de orden ε se cancelan.

De los de orden ε^2 obtenemos

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

Análogamente

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$$