

Momento Angular Cuántico III

Repaso:

momento angular orbital

conmutador

en general

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \rightarrow [L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \rightarrow [J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

$$J^2 = \vec{J} \cdot \vec{J} \quad \text{con} \quad \vec{J} = (J_x, J_y, J_z), \quad [J^2, J_i] = 0$$

$i=x,y,z$

- Podemos medir J^2 y UNA componente de $\vec{J}$ simultáneamente
- Buscaremos e-vectores comunes a J^2 y J_z .
- Definimos operadores escalera: $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$

$$\rightarrow \langle J^2 \rangle \geq 0$$

$\rightarrow$ Los e-valores de J^2 son positivos y los escribimos $\hbar^2 j(j+1)$

$\rightarrow$ Escribiremos los e-valores de J_z como $\hbar m$

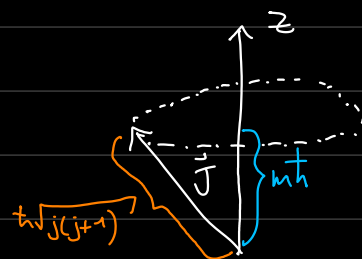
$$\begin{aligned} J^2 |\lambda j m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |\lambda j m\rangle \\ J_z |\lambda j m\rangle &= \hbar m |\lambda j m\rangle \end{aligned}$$

λ representa las etiquetas del estado que no tienen que ver con momento angular

Encontramos que $-j \leq m \leq j$

$$-\hbar \sqrt{j(j+1)} < -\hbar j \leq \hbar m \leq \hbar j < \hbar \sqrt{j(j+1)}$$

Como $\hbar m < \hbar \sqrt{j(j+1)}$ entonces $\vec{J}$ no puede ser paralelo al eje Z .



Identidades obtenidas la clase anterior

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

$$0 \leq \|J_+ |\psi, j, m\rangle\|^2 = \langle \psi, j, m | J_- J_+ |\psi, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m+1) \quad (1)$$

$$0 \leq \|J_- |\psi, j, m\rangle\|^2 = \langle \psi, j, m | J_+ J_- |\psi, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m-1) \quad (2)$$

Lema II:

- i) $m = -j \iff J_- |\psi, j, m\rangle = 0$
 ii) Si $m > -j$ entonces $J_- |\psi, j, m\rangle \neq 0$ y es e-vector de J^2 y J_z con e-valor $\hbar^2 j(j+1)$ y $\hbar(m-1)$

En el oscilador armónico $a|\phi_0\rangle = 0$
 $a|\phi_n\rangle \sim |\phi_{n-1}\rangle$

Dem:

i) $\Rightarrow$ Usando (2) con $m = -j$, $\|J_- |\psi, j, m\rangle\| = 0$

i) $\Leftarrow$ $J_- |\psi, j, m\rangle = 0 \Rightarrow J_+ J_- |\psi, j, m\rangle = 0$
 $(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z) |\psi, j, m\rangle = 0$
 $\hbar^2 (j(j+1) - m^2 + m) |\psi, j, m\rangle = 0$
 $\hbar^2 (j+m)(j-m+1) |\psi, j, m\rangle = 0$

Como $|\psi, j, m\rangle$ es un e-vector entonces $|\psi, j, m\rangle \neq 0$

$\Rightarrow (j+m)(j-m+1) = 0$

$\Rightarrow \begin{matrix} j+m=0 & \text{o} & j-m+1=0 \\ m=-j & & m=j+1 \end{matrix}$

~~$m=j+1$~~

pero $-j \leq m \leq j$

ii) Usando (2) si $m \neq -j$ $\|J_- |\psi, j, m\rangle\| \neq 0$

Por lo tanto $J_- |\psi, j, m\rangle \neq 0$

Veamos que $J_- |\psi, j, m\rangle$ es e-vector de J^2 y J_z

$J^2) [J^2, J_-] = [J^2, J_x - i J_y] = [J^2, J_x] - i [J^2, J_y] = 0$

$0 = [J^2, J_-] |\psi, j, m\rangle = J^2 J_- |\psi, j, m\rangle - J_- J^2 |\psi, j, m\rangle$

$\Rightarrow J^2 J_- |\psi, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) J_- |\psi, j, m\rangle$
 e-vector e-valor e-vector

J_z) Recordemos $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$

$$[J_z, J_-] |\uparrow, j, m\rangle = -\hbar J_- |\uparrow, j, m\rangle$$

$$(J_z J_- - J_- J_z) |\uparrow, j, m\rangle =$$

$$J_z \underbrace{J_- |\uparrow, j, m\rangle}_{\text{e-vector}} = (\hbar m - \hbar) J_- |\uparrow, j, m\rangle$$

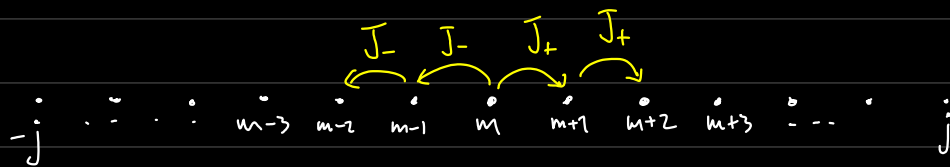
$$= \underbrace{\hbar(m-1)}_{\text{e-valor}} \underbrace{J_- |\uparrow, j, m\rangle}_{\text{e-vector}}$$

Lema III:

- i) $m = +j \Leftrightarrow J_+ |\uparrow, j, m\rangle = 0$
 ii) Si $m < j$ entonces $J_+ |\uparrow, j, m\rangle \neq 0$ y es
 e-vector de J^2 y J_z con e-valor $\hbar^2 j(j+1)$ y $\hbar(m+1)$
 análogo a lema II

Espectro de J^2 y J_z

$$-j \leq m \leq j$$



Para que esto sea consistente

- $\exists$ un entero $p \geq 0$ tal que $m-p = -j$
- $\exists$ un entero $q \geq 0$ tal que $m+q = j$

$$\Rightarrow 2j = p + q$$

$\therefore 2j$ es un entero positivo

Los valores posibles de j son

$j = 0, 1, 2, 3, \dots$ Bosones

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ Fermiones.

- Si j es entero m es entero
- Si j es semi-entero, m es semi-entero
- $j \geq 0$ pero m puede ser $+$ y $-$.
- Partiendo de un e-vector de J^2 y J_z , $|\chi, j, m\rangle$ podemos obtener más e-vectores usando J_+ y J_- .
- Los e-vectores correspondientes a distinto e-valor son ortogonales (para ops. hermitianos).

$$\therefore \langle \chi, j', m' | \chi, j, m \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm}$$

(Siempre podemos escoger e-vectores normalizados)

- Nos serviría tener una expresión del estilo $J_{\pm} |\chi, j, m\rangle = C |\chi, j, m \pm 1\rangle$
↑
por definir

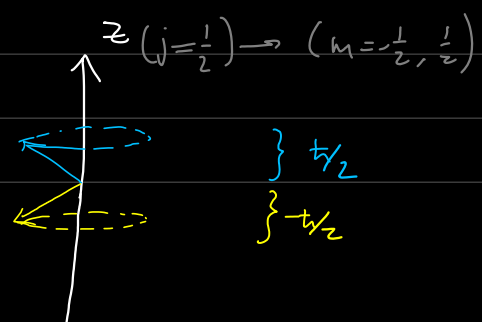
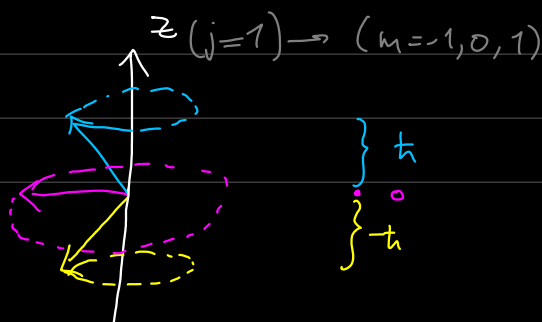
- Al normalizar determinamos C .

$$\begin{aligned} \|J_{\pm} |\chi, j, m\rangle\|^2 &= \langle \chi, j, m | J_{\mp} J_{\pm} | \chi, j, m \rangle = \langle \chi, j, m | J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z | \chi, j, m \rangle \\ &= \hbar^2 [j(j+1) - m^2 \mp m] = \hbar^2 [j(j+1) - m(m \pm 1)] \end{aligned}$$

$$\therefore J_{\pm} |\chi, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |\chi, j, m \pm 1\rangle$$

- Los valores permitidos de j dependerán del problema en particular.
- Para χ y j dados, hay $2j+1$ vectores ortonormales $|\chi, j, m\rangle$ con $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$

- Si j es entero m puede valer cero
- Si j es semi-entero m no puede valer cero



Representación matricial de $J^2, J_z, J_+, J_-, J_x, J_y$

$$\langle j', m' | J^2 | j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1) \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

⋮

Continuará