

Momento angular cuántico II

$\vec{L}$ m.a. con análogo clásico $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$
 $\vec{S}$ m.a. sin análogo clásico $\vec{S}$ espín.
 $\vec{J}$ m.a. en general.

$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} \rightarrow [L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$
Tensor de Levi-Civita

$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$; $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$; $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$

Definición de momento angular

Cantidad vectorial $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ con $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$

Definimos $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$

- J^2 es hermitiano pues J_x, J_y y J_z lo son.

$[J^2, J_x] = [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_x] \stackrel{[J_x^2, J_x]=0}{=} \underbrace{[J_y^2, J_x]}_{i)} + \underbrace{[J_z^2, J_x]}_{ii)}$

$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

$i) [J_y^2, J_x] = [J_y J_y, J_x] = -[J_x, J_y J_y] = -([J_x, J_y] J_y + J_y [J_x, J_y])$
 $= -(i\hbar J_z J_y + i\hbar J_y J_z) = -i\hbar (J_z J_y + J_y J_z)$

$ii) [J_z^2, J_x] = -([J_x, J_z] J_z + J_z [J_x, J_z]) = i\hbar (J_y J_z + J_z J_y)$

$\therefore [J^2, J_x] = 0$

análogamente

$[J^2, J_y] = 0$; $[J^2, J_z] = 0$

$\therefore$ Podemos medir J^2 simultáneamente con J_x, J_y o J_z

Por ejemplo, para una partícula en un potencial central L^2, L_x, L_y, L_z son ctes de mov pero no conmutan entre sí.

-Vamos a poder construir una base de e-vectores comunes a H, L^2 y L_z .

Podemos medir J^2 y UNA componente de $\vec{J}$ simultáneamente

→ Al eje que elegimos para describir al sistema se le llama "eje de cuantización".

Vamos a poner al eje z como eje de cuantización. Esto quiere decir que buscaremos e-vectores comunes a J^2 y J_z .

Operadores de momento angular.

→ Usaremos z como eje de cuantización

→ Vamos a usar operadores escalera J_+ y J_-

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

→ $J_{\pm}$ no son hermitianos $J_+^\dagger = J_-$; $J_-^\dagger = J_+$

Reglas de conmutación para J_+ y J_-

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= [J_z, J_x + iJ_y] = [J_z, J_x] + i[J_z, J_y] \\ &= i\hbar J_y - i i\hbar J_x = \hbar(J_x + iJ_y) = \hbar J_+ \end{aligned}$$

$$[J_z, J_-] = -\hbar J_-$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

$$[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = [J^2, J_z] = 0$$

$$J_+ J_- = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + iJ_y J_x - iJ_x J_y = J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z$$

$$+J_z^2 - J_z^2 \rightarrow J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J_- J_+ = \dots = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

Eigenvalores de J^2 y J_z

- Veamos que $\langle J^2 \rangle \geq 0$

arbitrario

$$\begin{aligned} \langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | J_x^\dagger J_x | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^\dagger J_y | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^\dagger J_z | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

las magnitudes de vectores siempre son positivas.

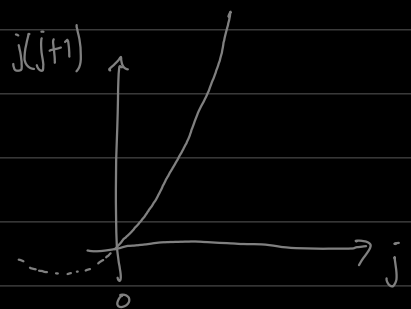
- Si $|\psi\rangle$ es e-vector de J^2 con e-valor λ
 $0 \leq \langle \psi | J^2 | \psi \rangle = \lambda \langle \psi | \psi \rangle = \lambda \| |\psi\rangle \|^2$
 $\therefore \lambda \geq 0$

$$J^2 | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle$$

$\therefore$ Los e-valores de J^2 son positivos.

Escribimos $\lambda = \hbar^2 j(j+1)$ (j adimensional y positivo)
 (Sin pérdida de generalidad)

- Escribiremos los e-valores de J_z
 como $\hbar m$ (m adimensional)



En general J^2 y J_z no son un conjunto completo de operadores que conmutan (CCOC).

Escribimos los e-vectores comunes como

Contiene todos los índices no relacionados con momento angular

$$| \chi, j, m \rangle$$

$\{ | \chi, j, m \rangle \}$ son una base de e-vectores ortonormales

Las ecuaciones de e-valores quedan como

$$J^2 | \chi, j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1) | \chi, j, m \rangle$$

$$J_z | \chi, j, m \rangle = \hbar m | \chi, j, m \rangle$$

$$J_- J_+ = \dots = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

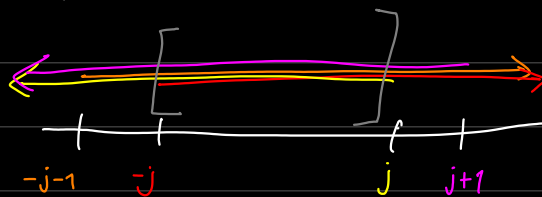
Lemma I: $-j \leq m \leq j$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|J_+ |\delta, j, m\rangle\|^2 &= \langle \delta, j, m | J_- J_+ | \delta, j, m \rangle \\ &= \langle \delta, j, m | \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m | \delta, j, m \rangle \\ &= \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m+1) \end{aligned}$$

$$0 \leq \|J_- |\delta, j, m\rangle\|^2 = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m+1) &\geq 0 \\ \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m-1) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} (j-m)(j+m+1) &\geq 0 \\ (j+m)(j-m+1) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ j-m \geq 0 \quad j+m+1 \geq 0 \quad j+m \geq 0 \quad j-m+1 \geq 0 \\ j \geq m \geq -j-1 \quad j+1 \geq m \geq -j \end{aligned}$$



∴ $-j \leq m \leq j$

Ojo $\sqrt{j(j+1)} > j \Rightarrow$ el vector $\vec{J}$ no puede apuntar hacia z

$$\sqrt{j(j+1)} < m < \sqrt{j(j+1)} \text{ estricto}$$

