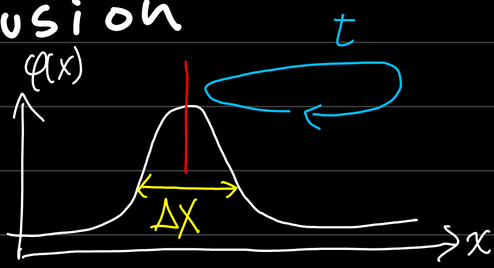
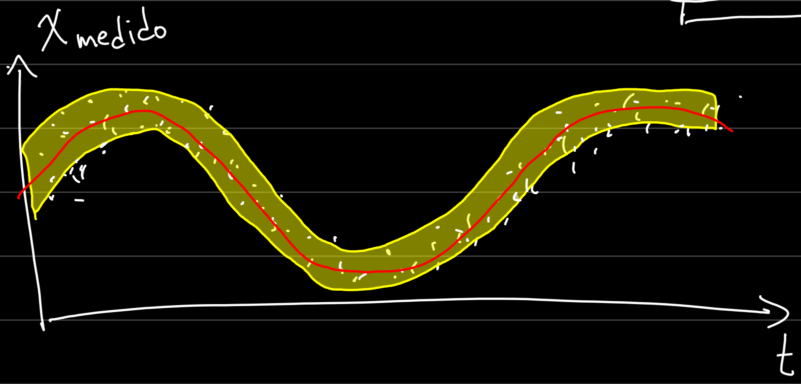
Oscilador armónico: conclusión

$\varphi(x)$ de estado coherente





$$\Delta H_\alpha^2 = \langle H^2\rangle_\alpha - \langle H\rangle_\alpha^2 = \hbar^2\omega^2\langle\alpha|\underbrace{\underbrace{(a^\dagger a+\tfrac{1}{2})^2}_{a^\dagger a a^\dagger a + a^\dagger a + 1/4}}_{a^\dagger a^\dagger a a + 2a^\dagger a + \frac{1}{4}}|\alpha\rangle - \hbar^2\omega^2\Big(\underbrace{\langle\alpha|a^\dagger a+\tfrac{1}{2}|\alpha\rangle}_{|\alpha|^2+\frac{1}{2}}\Big)^2$$

en un estado coherente $|\alpha\rangle$

$H=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})$
$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$
$\langle\alpha|a^\dagger=\langle\alpha|\alpha^*$
$[a,a^\dagger]=1$
$aa^\dagger=1+a^\dagger a$

$$= \hbar^2\omega^2\left(\cancel{\alpha^{*2}\alpha^2} + 2\alpha^*\alpha + \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) - \hbar^2\omega^2\left(\cancel{|\alpha|^4} + \cancel{|\alpha|^2} + \cancel{\tfrac{1}{4}}\right)$$

$$= \hbar^2\omega^2|\alpha|^2$$

$$\therefore\ \Delta H_\alpha = \hbar\omega|\alpha|$$

Por otro lado $\langle\alpha|H|\alpha\rangle = \hbar\omega\langle\alpha|a^\dagger a+\frac{1}{2}|\alpha\rangle = \hbar\omega(|\alpha|^2+\frac{1}{2})$

La desviación estándar de la energía relativo a el promedio es

$$\frac{\Delta H_\alpha}{\langle\alpha|H|\alpha\rangle} = \frac{\hbar\omega|\alpha|}{\hbar\omega(|\alpha|^2+\frac{1}{2})} \xrightarrow[\text{límite clásico}]{\alpha\to\infty} 0$$

¿Cuánto vale $|\alpha|$ para una masa de 1kg en un péndulo de $l=10$cm con amplitud de oscilación de 1cm?

$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \longrightarrow \omega=\frac{2\pi}{T}$; $H=\hbar\cancel{\omega}|\alpha|^2=\frac{1}{2}m\omega^{\cancel{2}}X_m^2 \Rightarrow |\alpha|=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}m\omega X_m^2}{\hbar}}$

$$\alpha\sim10^{15} \qquad \frac{\Delta H_\alpha}{\langle\alpha|H|\alpha\rangle}\sim10^{-15}$$

Oscilador armonico en 3D

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 = H_x + H_y + H_z$$

$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$, $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_x(x)\,\varphi_y(y)\,\varphi_z(z)$$

e-vectores $\quad \overset{1D}{|\phi_n\rangle} \longrightarrow \overset{3D}{|\phi_{n,m,k}\rangle}$

Momento angular en mecánica cuántica

- Importancia del momento angular $\vec{L}$
  - → Para un sistema aislado, $\vec{L}$ es una cte. de movimiento.
  - → Para partículas sujetas a un potencial central $\vec{L} = \vec{cte}$

    Clásicamente:
    - → El movimiento ocurre en un plano
    - → Obedece la 2a ley de Kepler: A iguales en t iguales.

Cuánticamente:

$\vec{L}$ esta asociado a tres observables $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$

- Veremos que en potencial central $\vec{L}$ es constante de movimiento.
- Esto ayuda a clasificar los e-vectores de un sistema en un potencial central.

  $\{H\}$ no es un CCOC pero
  $\{H,$ operadores de momento angular$\}$ sí són CCOC.

- Notación:
  - $\vec{L}$ momentos angulares con análogo clásico, Momentos angulares orbitales
  - $\vec{S}$ momentos angulares sin análogo clásico, espín.
  - $\vec{J}$ en general.

- Obtendremos las propiedades de $\vec{J}$ a partir de reglas de conmutacion

- Para $\vec{L}$ estas reglas son consecuencia de $[X,P]=i\hbar$
- Para $\vec{S}$ tomaremos las reglas de conmutación como definición (con motivación geométrica).

- Definimos $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$

Ojo con productos de operadores que no conmutan

$$S = \vec{R}\cdot\vec{P} = XP_x + YP_y + ZP_z$$
$$S^{+} = P_x X + P_y Y + P_z Z = \vec{P}\cdot\vec{R}$$

(S y S^{+} no son hermitianos).

Lo correcto es simetrizar

$$S_c = \frac{1}{2}\left(\vec{R}\cdot\vec{P} + \vec{P}\cdot\vec{R}\right)$$

Esto no nos va a importar porque

$\vec{L} = \vec{R}\times\vec{P} \rightarrow L_x = YP_z - ZP_y$ y $[Y,P_z]=0$; $[Z,P_y]=0$

Las reglas de conmutación de $\vec{R}$ y $\vec{P}$ $[R_i,R_j] = [P_i,P_j] = 0$

$[R_i,P_j] = i\hbar\delta_{ij}$

Reglas de conmutacion de $\vec{L}$

$$[L_x,L_y] = [YP_z - ZP_y,\, ZP_x - XP_z]$$
$$= [YP_z, ZP_x] - \cancel{[YP_z, XP_z]}^{\,0} - \cancel{[ZP_y, ZP_x]}^{\,0} + [ZP_y, XP_z]$$
$$= YP_x[P_z,Z] + XP_y[Z,P_z] = -i\hbar YP_x + i\hbar XP_y = i\hbar L_z$$

$[Z,P_z]=i\hbar$ $\quad$ $L_z = XP_y - YP_x$

- Análogamente

$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$; $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$; $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$

x y z   z x y   y z x

$\therefore$ No podemos medir L_x, L_y y L_z simultaneamente.

Usando el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (1,2,3), (2,3,1), \text{ or } (3,1,2), \\ -1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (3,2,1), (1,3,2), \text{ or } (2,1,3), \\ 0 & \text{if } i=j, \text{ or } j=k, \text{ or } k=i \end{cases}$$

Tullio Levi-Civita (de wikipedia)

(i,j,k)

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_k = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_i B_j$$

Así podemos resumir las reglas de conmutación

$$\boxed{[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}\, i\hbar L_k}$$

Vamos a usar estas reglas de conmutación para definir momentos angulares en general.

Definición de momento angular cuántico

$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ que satisface $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}\, i\hbar J_k$

También definimos $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$

J^2 es hermitiano pues J_x, J_y y J_z lo son.

A la próxima probaremos $[J^2, J_i] = 0$

Foto por Carlos Gardea