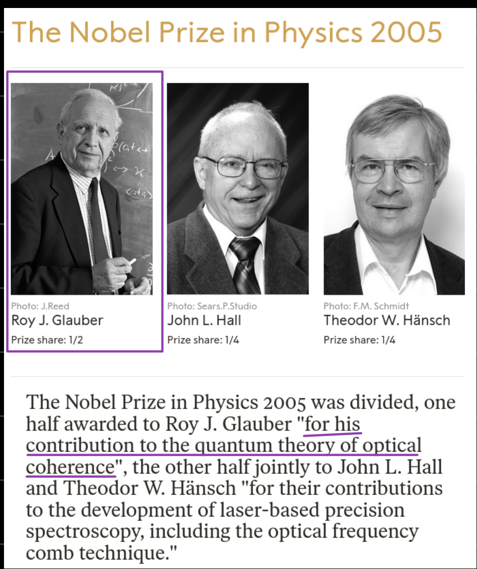
Oscilador armónico: estados coherentes

- Vimos que $\langle \phi_n | X | \phi_n \rangle = 0$; $\langle \phi_n | P | \phi_n \rangle = 0$
- Clásicamente x y p oscilan; sólo obtenemos $x = p = 0$ cuando $E = 0$
- Para $E \gg \hbar\omega$ esperaríamos un comportamiento clásico
- ¿Es posible construir un estado cuántico para el cual $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$ y $\langle H \rangle$ coincidan con el caso clásico?
- Veremos que sí se puede: estados coherentes / estados cuasi-clásicos / estados de Glauber (1963)

$\downarrow$

modelan el estado de la luz que sale de un láser



→ Buscamos un $|\psi\rangle$ para el que $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$ y $\langle H \rangle$ sean lo más parecido posible a sus valores clásicos.

→ Además esperaríamos que $\Delta X, \Delta P, \Delta H \to 0$ en el límite clásico. (o algo parecido)

Oscilador clásico

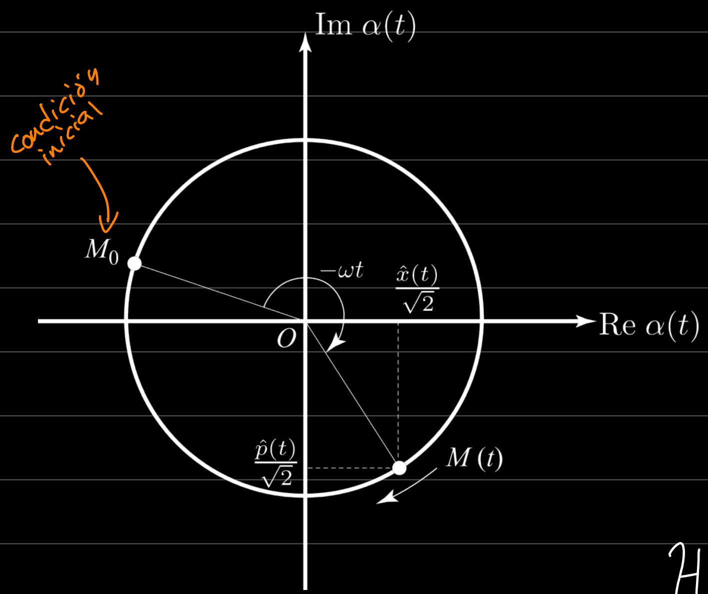
Ecuaciones de movimiento
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = \frac{1}{m} P(t) \\ \frac{d}{dt} P(t) = -m\omega^2 X(t) \end{cases}$$

Adimensionalizando
$$\hat{p}(t) = \frac{1}{\hbar\beta} P(t) \qquad \hat{x}(t) = \beta X(t)$$
$$\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \omega \hat{p}(t) \\ \frac{d}{dt} \hat{p}(t) = -\omega \hat{x}(t) \end{cases}$$

tienen soluciones oscilatorias.
Definimos

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}(t) + i\hat{p}(t)\right) \implies \dot{\alpha}(t) = -i\omega\alpha(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$$
con $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{x}(0) + i\hat{p}(0)\right]$ $(*)$
$$\Downarrow$$
$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}\right]$$
$$\hat{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t}\right]$$



$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(P(0))^2 + \frac{1}{2}m\omega^2[X(0)]^2$$
$$= \hbar\omega|\alpha_0|^2$$
usando $(*)$

Condiciones para definir los estados coherentes

Consideremos (Usando $\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H(t)]\rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t}\rangle$)

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle [a, H]\rangle = \frac{\hbar\omega}{i\hbar}\langle [a, a^{+}a]\rangle \overset{[a^{+}a,a]=-a}{\downarrow}{=} -i\omega\langle a\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle a\rangle(t) = \langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t}$$

Análogamente

$$\langle a^{+}\rangle(t) = [\langle a\rangle(0)]^{*} e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow$ adimensional

$$\langle \hat{X}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t} + \langle a\rangle^{*}(0)\, e^{i\omega t}]$$
$$\langle \hat{P}\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}[\langle a\rangle(0)\, e^{-i\omega t} - \langle a\rangle^{*}(0)\, e^{i\omega t}]$$

Recordando

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^{*} e^{i\omega t}]$$
$$\hat{p}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}[\alpha_0 e^{i\omega t} - \alpha_0^{*} e^{i\omega t}]$$

Buscamos $|\psi(t)\rangle$ para el que

$$\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = x(t)$$
$$\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle = p(t)$$

Esto ocurre $\Leftrightarrow$ $\langle a\rangle(0) = \alpha_0$ o bien $\langle\psi(0)|a|\psi(0)\rangle = \alpha_0$

Por otro lado $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \hbar\omega(\langle\psi(t)|a^{+}a|\psi(t)\rangle + \cancel{\tfrac{1}{2}})$

ignoramos el $\frac{1}{2}$ pues buscamos $\hbar\omega\langle a^{+}a\rangle \gg \frac{\hbar\omega}{2}$

- clásicamente $\mathcal{H} = \hbar\omega|\alpha_0|^2$, Esto ocurre $\Leftrightarrow$ $|\alpha_0|^2 = \langle\psi(0)|a^{+}a|\psi(0)\rangle$.

$$\boxed{\therefore \text{ Buscamos un } |\psi(0)\rangle \text{ que cumpla } \begin{cases} \langle\psi(0)|a|\psi(0)\rangle = \alpha_0 \\ \langle\psi(0)|a^{+}a|\psi(0)\rangle = |\alpha_0|^2 \end{cases}} \quad (**)$$

Estados coherentes

Que se cumplan (* *) significa que $|\psi(0)\rangle$ debe ser e-vector de a. Probemos esto:

Definimos $b = a - \alpha_0$ y probaremos que $\| b|\psi(0)\rangle \| = 0$

$$\langle\psi(0)|b^+ b|\psi(0)\rangle = \langle b^+ b\rangle = \langle (a-\alpha_0)^+ (a-\alpha_0)\rangle$$

$$= \langle a^+ a\rangle - \alpha_0\langle a^+\rangle - \alpha_0^*\langle a\rangle + \alpha_0^*\alpha_0$$

$\langle\psi(0)|a|\psi(0)\rangle = \alpha_0$

$\langle\psi(0)|a^+ a|\psi(0)\rangle = |\alpha_0|^2$

$\langle\psi(0)|a^+|\psi(0)\rangle = \alpha_0^*$

$$= \cancel{|\alpha_0|^2} - \cancel{|\alpha_0|^2} - \cancel{|\alpha_0|^2} + \cancel{|\alpha_0|^2}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad b|\psi(0)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad a|\psi(0)\rangle = \alpha_0|\psi(0)\rangle$$

$\therefore$ $|\psi(0)\rangle$ debe ser e-vector de a.

De aquí en adelante usaremos esta notación

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

operador de descenso

estado coherente

eigenvalor

Propiedades de $|\alpha\rangle$

-¿Cómo escribir $|\alpha\rangle$ en la base de $|\phi_n\rangle$?

Buscamos $\{C_n(\alpha)\}$ tales que $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha)|\phi_n\rangle$

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha)\, a|\phi_n\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\alpha)\sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle$$

$n-1 \to m$

$n \to m+1$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1}(\alpha)\sqrt{m+1}\,|\phi_m\rangle$$

$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$$= \alpha|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\alpha)\,\alpha\,|\phi_m\rangle$$

$$\Rightarrow \quad C_{m+1}(\alpha) = C_m(\alpha)\frac{\alpha}{\sqrt{m+1}}$$

$$\Rightarrow \quad C_m(\alpha) = C_0(\alpha)\,\alpha^m/\sqrt{m!}$$

(nos falta saber que es $C_0(\alpha)$)

Para encontrar $C_0(\alpha)$ debemos normalizar

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n(\alpha)|^2 = |C_0(\alpha)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0(\alpha)| \, e^{|\alpha|^2}$$

$$\Rightarrow \quad |C_0(\alpha)| = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} ;$$

si elegimos $C_0(\alpha)$ real y positivo

$$\boxed{|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle}$$

estado coherente

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} P \right)$$

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener E_n al medir la energía de un sistema en estado $|\alpha\rangle$?

$$\mathcal{P}_m(\alpha) = |\langle \phi_m | \alpha \rangle|^2 = \left| e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \right|^2$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!}$$

Distribucion de Poisson para $\lambda = |\alpha|^2$

$$P_n(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$