Oscilador armónico III

$$\boxed{\begin{aligned} a^+|\phi_n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle \\ a\,|\phi_n\rangle &= \sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle \end{aligned}}$$

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,(a+a^+)$$
$$P=\frac{1}{\sqrt{2}\,i}\sqrt{m\omega\hbar}\,(a-a^+)$$

¿Cuál es la representación matricial de a y a^+?

$$(a)_{nm}=\langle\phi_n|a|\phi_m\rangle=\sqrt{m}\,\langle\phi_n|\phi_{m-1}\rangle=\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}$$
$$(a^+)_{nm}=\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}$$

$$(a)=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & 0 \\ & 0 & \sqrt{2} & \\ & & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad (a^+)=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \\ 0 & & \sqrt{3} & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(X)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^+)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

(P) es similar.

$$\langle\phi_n|X|\phi_m\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}+\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}\right)$$
$$\langle\phi_n|P|\phi_m\rangle=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}-\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}\right)$$

otra forma de escribir a y a^+

$$a=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle\langle\phi_n|$$

$$\boxed{\begin{aligned} a^+|\phi_n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle \\ a\,|\phi_n\rangle &= \sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle \end{aligned}}$$

$$a|\phi_n\rangle=\sum_m\sqrt{m}\,|\phi_{m-1}\rangle\overbrace{\langle\phi_m|\phi_n\rangle}^{\delta_{mn}}$$
$$=\sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle$$

$$a^+=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\langle n|$$

Funciones de onda

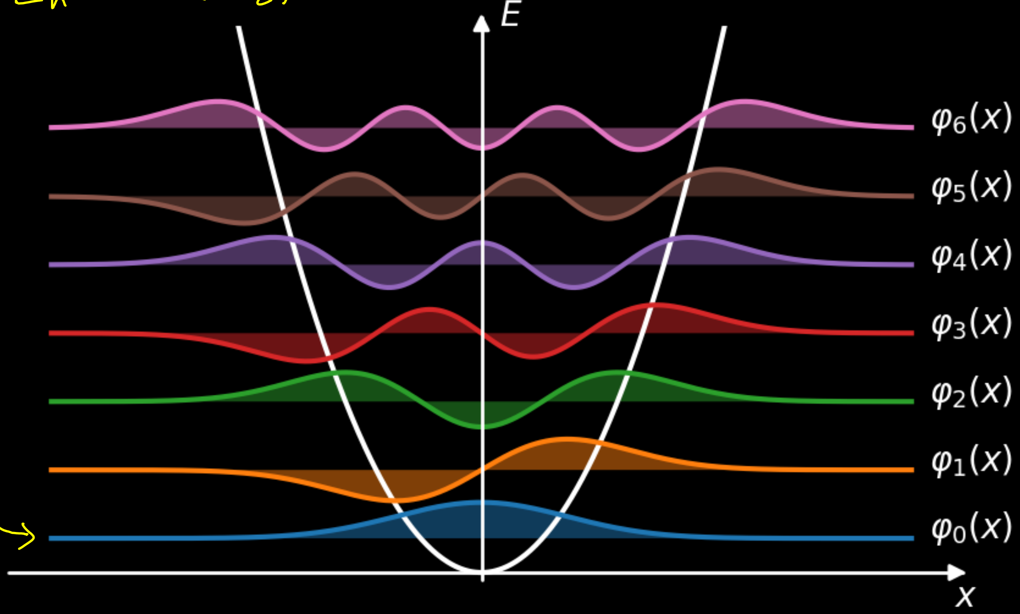
$$\langle x|\phi_0\rangle = \phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \qquad \left(\text{la sacamos usando } a|\phi_0\rangle = 0\right)$$

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|\phi_0\rangle$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)^n \phi_0(x)$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

estado base



- Si n aumenta:
  - Hay más ceros en $\phi_n(x)$

    $$\frac{1}{2m}\langle p^2\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n^*(x)\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)\,dx$$

  - En los extremos hay mayor probabilidad que en el centro
  - La función de onda se extiende más en el espacio.

¿Qué obtenemos al medir X o P de un estado propio de H?

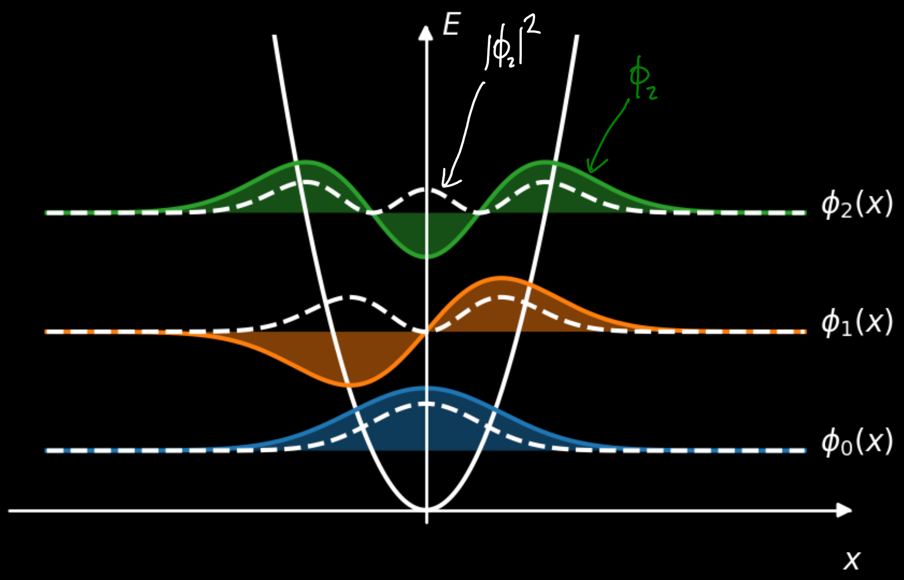
$$[X, H] \neq 0 \qquad [P, H] \neq 0$$

$$\left[X, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2\right] \overset{[X,X^2]=0}{=} \left[X, \frac{p^2}{2m}\right] \neq 0$$

$\Rightarrow$ Si el sistema está en un e-estado de H, el valor de X o P que obtenemos al medirlos es aleatorio. Podemos obtener cualquier resultado (con probabilidades pesadas por $|\phi_n(x)|^2$.

En promedio:

$$\langle X \rangle = \langle \phi_n | X | \phi_n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \phi_n | a + a^+ | \phi_n \rangle = 0$$
$$\langle P \rangle = \langle \phi_n | P | \phi_n \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle \phi_n | a - a^+ | \phi_n \rangle = 0$$



¿Qué tan dispersas salen las mediciones?

$$\Delta X^2 = \langle \phi_n | X^2 | \phi_n \rangle - \left(\cancelto{0}{\langle \phi_n | X | \phi_n \rangle}\right)^2 = \langle \phi_n | X^2 | \phi_n \rangle$$

$$\Delta P^2 = \cdots = \langle \phi_n | P^2 | \phi_n \rangle$$

$aa^+ = 1 + a^+a \qquad N = a^+a \qquad [a, a^+] = 1$

$$X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a+a^+)(a+a^+) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^{+2} + aa^+ + a^+a + a^2\right)$$

$$\langle\phi_n|X^2|\phi_n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\phi_n|\cancel{a^{+2}} + aa^+ + a^+a + \cancel{a^2}|\phi_n\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\phi_n|2a^+a + 1|\phi_n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\langle\phi_n|P^2|\phi_n\rangle = \cdots = m\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle = \frac{1}{2\cancel{m}}\cancel{m}\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cancel{m}\omega^{\cancel{2}}\frac{\hbar}{\cancel{m\omega}}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

Evolución temporal

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)|\phi_n\rangle \qquad \text{Condición inicial}$$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\phi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)\, e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}$$

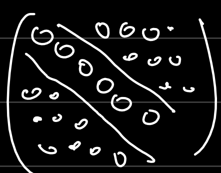
Para un observable A

$$\langle\Psi(t)|A|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_m^*(0)\,c_n(0)\,A_{mn}\,e^{i(m-n)\omega t}$$

$\langle\phi_m|A|\phi_n\rangle$

$\therefore$ Como $n, m \in \mathbb{Z}^+$ los téminos de la suma oscilan con frecuencia ω o sus armónicos.

Si $A = X$; $X_{mn} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}\right)$

$(X) =$ 

Para $A=X$, en $\langle X\rangle(t)$ no quedan los armónicos y todos los términos oscilan con frecuencia $\pm\omega$.

(P es análogo).

- $|\phi_n\rangle$ es un estado estacionario.
- Para que $\langle x\rangle$ o $\langle p\rangle$ cambien en el tiempo necesitamos una superposición de $|\phi_n\rangle$'s.

Ejemplos concretos.

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(0)|\phi_n\rangle$$

1. Si $C_{m_0}(0) = 1$ y $C_n(0)=0$ para $n\neq m_0$

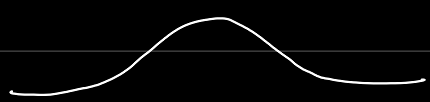
$$|\psi(0)\rangle = |\phi_{m_0}\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-i\omega(m_0+\frac{1}{2})t}|\phi_{m_0}\rangle$$

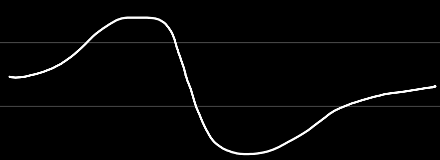
$$\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle\phi_{m_0}|\cancel{e^{+i\omega(m_0+\frac{1}{2})t}}\, A\, \cancel{e^{-i\omega(m_0+\frac{1}{2})t}}|\phi_{m_0}\rangle$$

$$= \langle\phi_{m_0}|A|\phi_{m_0}\rangle$$

2. Si $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_0\rangle + |\phi_1\rangle\right)$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\omega\frac{1}{2}t}|\phi_0\rangle + e^{-i\omega\frac{3}{2}t}|\phi_1\rangle\right]$$

$\phi_0(x) =$ 

$\phi_1(x) =$ 

t_0 t_1