

Oscilador Armónico II

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$$

- Definimos a y $a^\dagger$ descenso ascenso

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \right)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \right)$$

a y $a^\dagger$ no son hermitianos

Operador de número $N = a^\dagger a \neq a a^\dagger$ hermitiano

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[N, a] = -a$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger$$

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$$

entero ≥ 0

- Eigenvectores de N son $|\phi_n\rangle \Rightarrow N|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle$
- Los $|\phi_n\rangle$ también son e-vectores de H con e-valor $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

$\therefore$ Ya conocemos el espectro de H y de N .

$$a|\phi_0\rangle = 0$$

- ($n > 0$) $a|\phi_n\rangle$ es e-vector de N con e-valor $n-1$
- $a^\dagger|\phi_n\rangle$ es e-vector de N con e-valor $n+1$

Eigenvectores de H y de N .

Degeneración (o no) de e-valores de N .

Partiendo de que $a|\phi_{n=0}\rangle = 0$ escribimos esta ecuación en la base $\{|x\rangle\}$ (multiplicando por $\langle x|$)

$$0 = \langle x|a|\phi_{n=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x| \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \right) |\phi_0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \langle x|X|\phi_0\rangle + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}} \langle x|P|\phi_0\rangle \right)$$

$$\left. \begin{aligned} X|x\rangle &= x|x\rangle \\ \langle x|P|\phi_0\rangle &= -i\hbar \frac{d}{dx} \langle x|\phi_0\rangle \end{aligned} \right\}$$

$$\langle x|\phi_0\rangle = \phi_0(x)$$

$$0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar} x + \frac{d}{dx} \right) \phi_0(x)$$

Solución

$$\phi_0(x) = c e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

Al pedir que $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_0(x)|^2 dx = 1$ definimos $|c|$

$\therefore$ Todas las soluciones son la misma multiplicada por un escalar

$\therefore$ Sólo hay un e-vector asociado a $n=0$.

La constante c puede tener la forma $c = |c| e^{i\theta}$.
Tenemos la libertad de escoger θ así que elegimos $\theta = 0$.

$$\therefore \text{Ya normalizado } \phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Ya que sabemos que el e-valor 0 es no-degenerado podemos probarlo para el e-valor n por inducción.

- Paso base ✓

- Supongamos que n es un e-valor no degenerado.
(i.e. sólo tiene un e-vector). ($n > 0$)

$$N|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle$$

↑
ya sabemos que
es único

$$N|\phi_{n+1}\rangle = (n+1)|\phi_{n+1}\rangle$$

↑
Queremos probar
que es único

$$a|\phi_{n+1}\rangle \stackrel{n>0}{\neq} 0$$

$a|\phi_{n+1}\rangle$ es un e-vector de N con e-valor n .
aplicando $a^\dagger$

$$a|\phi_{n+1}\rangle = c|\phi_n\rangle \Rightarrow a^\dagger a|\phi_{n+1}\rangle = c a^\dagger |\phi_n\rangle \\ \Rightarrow |\phi_{n+1}\rangle = \frac{c}{n+1} a^\dagger |\phi_n\rangle$$

$\therefore$ Todos los e-fets con e-valor $n+1$ son proporcionales a $a^\dagger |\phi_n\rangle$.

$\therefore$ El e-valor $n+1$ es no degenerado.

(como los e-vectores sólo difieren por una constante)
entonces son el mismo

Eigenvectores de N (y H)

- Ya tenemos $|\phi_0\rangle$

- Podemos obtener $|\phi_1\rangle$ usando $|\phi_1\rangle = C_1 a^\dagger |\phi_0\rangle$
para conocer C_1 debemos normalizar $|\phi_1\rangle$

$$\begin{aligned} 1 = \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle &= \langle \phi_0 | a C_1^* \cdot C_1 a^\dagger | \phi_0 \rangle = |C_1|^2 \langle \phi_0 | a a^\dagger | \phi_0 \rangle \\ &= |C_1|^2 \langle \phi_0 | a^\dagger a + 1 | \phi_0 \rangle \\ &= |C_1|^2 \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle \\ &= |C_1|^2 \end{aligned}$$

$C_1 = K_1 e^{i\theta_1}$ elegimos $\theta = 0$
 $\therefore |\phi_1\rangle = a^\dagger |\phi_0\rangle$

- Podemos obtener $|\phi_2\rangle$ usando $|\phi_2\rangle = C_2 a^\dagger |\phi_1\rangle$
para conocer C_2 normalizamos $|\phi_2\rangle$

$$\begin{aligned} 1 = \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle &= |C_2|^2 \langle \phi_1 | a a^\dagger | \phi_1 \rangle \\ &= |C_2|^2 \langle \phi_1 | a^\dagger a + 1 | \phi_1 \rangle \\ &= 2 |C_2|^2 \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle^{\uparrow 1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow |C_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$; Si $C_2 = |C_2| e^{i\theta_2}$ elegimos $\theta_2 = 0$

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger a^\dagger |\phi_0\rangle$$

- En general. $|\phi_n\rangle = C_n a^\dagger |\phi_{n-1}\rangle$

$$\begin{aligned} 1 = \langle \phi_n | \phi_n \rangle &= |C_n|^2 \langle \phi_{n-1} | a a^\dagger | \phi_{n-1} \rangle \\ &= |C_n|^2 \langle \phi_{n-1} | \underbrace{a^\dagger a + 1}_{N = a^\dagger a} | \phi_{n-1} \rangle = |C_n|^2 \left[\langle \phi_{n-1} | N | \phi_{n-1} \rangle + \langle \phi_{n-1} | \phi_{n-1} \rangle \right] \\ &= n |C_n|^2 \langle \phi_{n-1} | \phi_{n-1} \rangle^{\uparrow 1} \end{aligned}$$

Handwritten note: $N = a^\dagger a$, $N|\phi_{n-1}\rangle = (n-1)|\phi_{n-1}\rangle$

$|C_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ y eligiendo θ_n de $C_n = |C_n| e^{i\theta_n}$ como $\theta = 0$
entonces $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \therefore |\phi_n\rangle &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{n!}} a^\dagger |\phi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{n-1!}} a^\dagger a^\dagger |\phi_{n-2}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |\phi_0\rangle \end{aligned}$$

Reacomodando y cambiando $n \rightarrow n+1$

$$a^\dagger |\phi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle$$

Para saber cómo actúa a . Multiplicamos $(*)$ por a y tenemos

$$\begin{aligned} a |\phi_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} a a^\dagger |\phi_{n-1}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger a + 1) |\phi_{n-1}\rangle \\ &\stackrel{[a, a^\dagger]=1}{=} \frac{1}{\sqrt{n!}} (n-1+1) |\phi_{n-1}\rangle \\ &= \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle \end{aligned}$$

Acción de
operadores
escalera

$$\begin{aligned} a^\dagger |\phi_n\rangle &= \sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle \\ a |\phi_n\rangle &= \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle \end{aligned}$$

- Como H o N son hermitianos y todos sus e -valores son distintos

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \phi_m \rangle &= \delta_{nm} \\ \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \right) \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (a + a^\dagger) \\ P = \frac{1}{\sqrt{2}i} \sqrt{m\hbar\omega} (a - a^\dagger) \end{cases}$$

- Los observables X y P son combinación lineal de a y $a^\dagger$. Así que ya podemos calcular cómo actúan X y P sobre los $|\phi_n\rangle$

Las ecuaciones adjuntas

$$\begin{aligned} a^\dagger |\phi_n\rangle &= \sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle \xrightarrow{\text{c.h.}} \langle \phi_n | a = \sqrt{n+1} \langle \phi_{n+1} | \\ a |\phi_n\rangle &= \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle \xrightarrow{\text{c.h.}} \langle \phi_n | a^\dagger = \sqrt{n} \langle \phi_{n-1} | \end{aligned}$$

$\therefore$ El operador a^+ aplicado a la derecha sube n pero hacia la izquierda baja n .

$$\langle \phi_m | a | \phi_n \rangle = \begin{cases} \langle \phi_m | \phi_{n-1} \rangle \sqrt{n} = \delta_{m,n-1} \sqrt{n} & \text{aplicado } \rightarrow \\ \langle \phi_{m+1} | \phi_n \rangle \sqrt{n+1} = \delta_{m+1,n} \sqrt{n+1} & \text{aplicado } \leftarrow \end{cases}$$

$$X | \phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (a + a^+) | \phi_n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\sqrt{n} | \phi_{n-1} \rangle + \sqrt{n+1} | \phi_{n+1} \rangle]$$

$\Rightarrow$ El operador de posición en la base $\{ | \phi_n \rangle \}$

$$X_{nm} = \langle \phi_m | X | \phi_n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}]$$

$$\Rightarrow X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Funciones de onda

$$\langle x | \phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x | (a^+)^n | \phi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \langle x | \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \right)^n | \phi_0 \rangle$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx} \right)^n \phi_0(x)$$

$\uparrow$
 $X | x \rangle = x | x \rangle$
 $\langle x | p | \phi_0 \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \phi_0(x)$

$\langle x | \phi_0 \rangle = \phi_0(x)$

$\uparrow$
ya la conocemos
 $\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$

Ejemplo $n=1$ (primer estado excitado)

$$\phi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} = \dots = \left[\frac{4}{\pi} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^3 \right]^{1/4} x e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

Ejemplos:

