

Oscilador armónico cuántico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

→ H no depende de t

→ Comenzaremos por buscar los estados estacionarios.

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

→ En la representación $\{x\}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

→ Las soluciones a esta ec. dif son polinomios de Hermite

→ Usar un método algebraico para encontrar e-valores y e-vectores.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

Definimos los operadores a y a⁺

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P \right)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X - i \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P \right)$$

$$[a, a^+] = aa^+ - a^+a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X - i \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X - i \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cancel{\frac{m\omega}{\hbar} X^2} - i \frac{1}{\hbar} XP + i \frac{1}{\hbar} PX + \cancel{\frac{1}{m\hbar\omega} P^2} - \cancel{\frac{m\omega}{\hbar} X^2} - i \frac{1}{\hbar} XP + i \frac{1}{\hbar} PX - \cancel{\frac{1}{m\hbar\omega} P^2} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{i\hbar} \right) (XP - PX) = \frac{1}{i\hbar} [X, P] = 1$$

$$\therefore [a, a^+] = 1$$

→ Nota a y a⁺ no son operadores hermitianos

Por otro lado

$$\begin{aligned} a^+ a &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} X^2 + \frac{1}{i\hbar} PX - \frac{1}{i\hbar} XP + \frac{1}{m\hbar\omega} P^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} X^2 - \frac{1}{i\hbar} [X, P] + \frac{1}{m\hbar\omega} P^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} X^2 + \frac{1}{m\hbar\omega} P^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

$$[x, p] = i\hbar \quad \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2m} p^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \hbar \omega \left(\overbrace{a^\dagger a}^N + \frac{1}{2} \right) = \hbar \omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$$

Si diagonalizamos N , habremos diagonalizado H .

$$N|\phi_\nu\rangle = \nu|\phi_\nu\rangle \Rightarrow H|\phi_\nu\rangle = \hbar\omega(\nu + \frac{1}{2})|\phi_\nu\rangle$$

↑ Eigenvector de N y H

- Eigenvalor de N

- Los eigenvalores de N son ≥ 0

$$\| |\psi\rangle \|^2 \geq 0 \text{ en particular } \| a|\phi_\nu\rangle \|^2 \geq 0$$

$$0 \leq \langle \phi_\nu | a^\dagger a | \phi_\nu \rangle = \langle \phi_\nu | N | \phi_\nu \rangle = \nu \langle \phi_\nu | \phi_\nu \rangle \quad (*)$$

como $\langle \phi_\nu | \phi_\nu \rangle \geq 0$ entonces $V \geq 0$

I) Propiedades de $|\phi_\nu\rangle$

$$i) \quad S_i \quad \nu=0 \quad \alpha |\phi_\nu\rangle = 0$$

ii) Si $\nu > 0$ $a|\Phi_\nu\rangle$ es e-vector de N

Con e-valor $\nu-1$.

i) Per (*) si $\nu=0$, $\|a|\phi_\nu\rangle\|=0$ per tanto $a|\phi_\nu\rangle=0$

ii) Supergamos $\nu > 0$, $N a |\phi_\nu\rangle = \text{???} = (\nu-1) a |\phi_\nu\rangle$

Necesitamos $[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad \text{---} = -0$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$\begin{aligned}
 Na|\phi_\nu\rangle &= (aN - a)|\phi_\nu\rangle = aN|\phi_\nu\rangle - a|\phi_\nu\rangle \\
 &= a\nu|\phi_\nu\rangle - a|\phi_\nu\rangle \\
 &= (\nu-1)a|\phi_\nu\rangle,
 \end{aligned}$$

$|\phi_\nu\rangle$ es e-vector de N factorizando $a|\phi_\nu\rangle$

II) Propiedades de $a^+|\phi_\nu\rangle$

i) $a^+|\phi_\nu\rangle$ nunca es cero

ii) $a^+|\phi_\nu\rangle$ es e-vector de N con e-valor $\nu+1$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \|a^+|\phi_\nu\rangle\|^2 &= \langle\phi_\nu|a a^+|\phi_\nu\rangle \stackrel{[a, a^+] = 1}{=} \langle\phi_\nu|a^+ a + 1|\phi_\nu\rangle \\
 &= \langle\phi_\nu|N+1|\phi_\nu\rangle \\
 &= (\nu+1)\langle\phi_\nu|\phi_\nu\rangle
 \end{aligned}$$

Como $\nu \geq 0$ $\|a^+|\phi_\nu\rangle\| > 0$

ii) Análogo al argumento para a . usando $[N, a^+] = a^+$

Con I y II probamos que el espectro de N es positivo y espaciado por distancias enteras. Veamos que el espectro de N son los enteros

- Por contradicción. Supongamos e-valor ν no entero.

- $\exists$ n entero $n < \nu < n+1$

- $a^n|\phi_\nu\rangle$ es e-vector con e-valor $\nu - n - 1 < 0$
pero los e-valores de N son ≥ 0 ∇

$$|\phi_3\rangle \xrightarrow{a} |\phi_2\rangle \xrightarrow{a} |\phi_1\rangle \xrightarrow{a} |\phi_0\rangle \xrightarrow{a} 0$$

◦ El espectro de N son los enteros no negativo n

◦ El espectro de H es $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ con n entero no negativo.

La energía mínima $\frac{\hbar\omega}{2}$.

- H y N tienen e-valores distintos pero e-vectores comunes.
- Escribiremos $|\phi_n\rangle$ en vez de $|\phi_\nu\rangle$ porque ya sabemos que ν es entero.

$$H|\phi_n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|\phi_n\rangle \Rightarrow E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

aplicando a $\Rightarrow E_{n-1} = \hbar\omega(n-1 + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \hbar\omega$
 $= E_n - \hbar\omega$