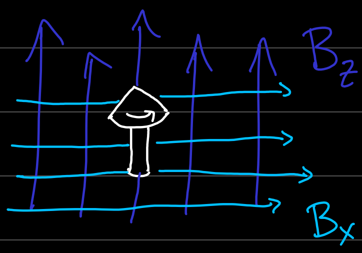
Sistema de dos niveles



con B_z

$$H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_z & 0 \\ 0 & -\omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$$

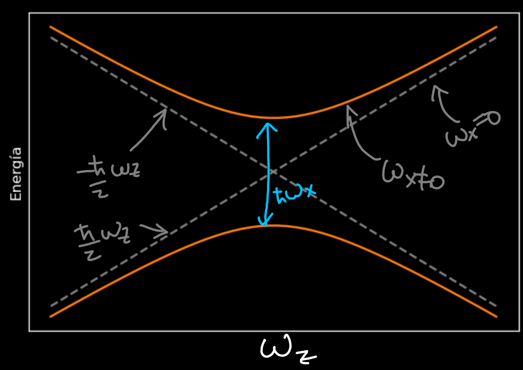
$$E_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\omega_z$$

razón giromagnética

Con B_x y B_z $\qquad \omega_x = -\gamma B_x \qquad \omega_z = -\gamma B_z$

$$H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x \\ \omega_x & -\omega_z \end{pmatrix}$$

$$E_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{\omega_z^2 + \omega_x^2}$$



$$|\psi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$$

$$|\psi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle$$

para $\omega_z = 0$

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm|+\rangle + |-\rangle\right)$$

Eigenvectores (sin normalizar)

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} -\omega_z + \sqrt{\omega_z^2 + \omega_x^2} \\ \omega_x \end{pmatrix} \qquad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} -\omega_z - \sqrt{\omega_z^2 + \omega_x^2} \\ \omega_x \end{pmatrix}$$

$$|\psi_+\rangle = r\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + r\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$$ (al normalizar $r=1$)

$$r\cos\frac{\theta}{2} = -\omega_z + \sqrt{\omega_z^2 + \omega_x^2} \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\omega_x}{-\omega_z + \sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2}}$$

$$r\sin\frac{\theta}{2} = \omega_x$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{\omega_x}{\omega_z}$$

Si $\omega_z \ll \omega_x \rightarrow \theta \approx \frac{\pi}{2}$; Si $\omega_z \gg \omega_x \rightarrow \theta \approx 0$

Dinámica temporal

$$|\psi(t)\rangle = a_+(t)\,|+\rangle + a_-(t)\,|-\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle \qquad H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x \\ \omega_x & -\omega_z \end{pmatrix}$$

$$i\hbar\left(\dot{a}_+\,|+\rangle + \dot{a}_-\,|-\rangle\right) = H\left(a_+\,|+\rangle + a_-|-\rangle\right)$$

multipicando por $\langle -|$ y $\langle +|$

$\langle +|$: $\quad i\hbar\,\dot{a}_+ = a_+\,\langle +|H|+\rangle + a_-\langle +|H|-\rangle$

$\langle -|$: $\quad i\hbar\,\dot{a}_- = a_+\,\langle -|H|+\rangle + a_-\,\langle -|H|-\rangle$

ω_x causa que las ecuaciones se acoplen

Para encontrar la evolución temporal escribimos $|\psi(0)\rangle$ en la base de e-vectores de H.

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$= \cos\tfrac{\theta}{2}|\psi_+\rangle - \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\,|\psi_-\rangle$$

$$|\psi_+\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}\,|+\rangle + \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}|-\rangle$$

$$|\psi_-\rangle = -\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\tfrac{\theta}{2}\,|-\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$|+\rangle = \alpha\,|\psi_+\rangle + \beta\,|\psi_-\rangle$$

$$\langle\psi_+|+\rangle = \alpha \;; \quad \langle\psi_-|+\rangle = \beta$$

$$|+\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}\,|\psi_+\rangle - \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\,|\psi_-\rangle$$

$$|-\rangle = \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\,|\psi_+\rangle + \cos\tfrac{\theta}{2}\,|\psi_-\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$|\psi(t)\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}\, e^{-iE_+t/\hbar}\,|\psi_+\rangle - \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\, e^{-iE_-t/\hbar}\,|\psi_-\rangle$$

¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|-\rangle$ al tiempo t?

$$P_-(t) = |\langle -|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\cos\tfrac{\theta}{2}\,\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\,e^{-iE_+t/\hbar} - \cos\tfrac{\theta}{2}\,\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\,e^{-iE_-t/\hbar}\right|^2$$

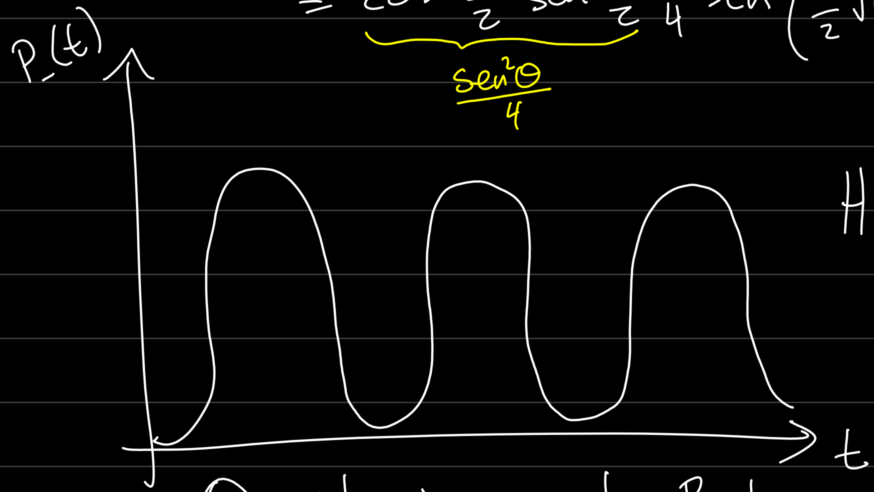
$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\left|e^{-iE_+t/\hbar} - e^{-iE_-t/\hbar}\right|^2$$

$$E_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{\omega_z^2+\omega_x^2}$$

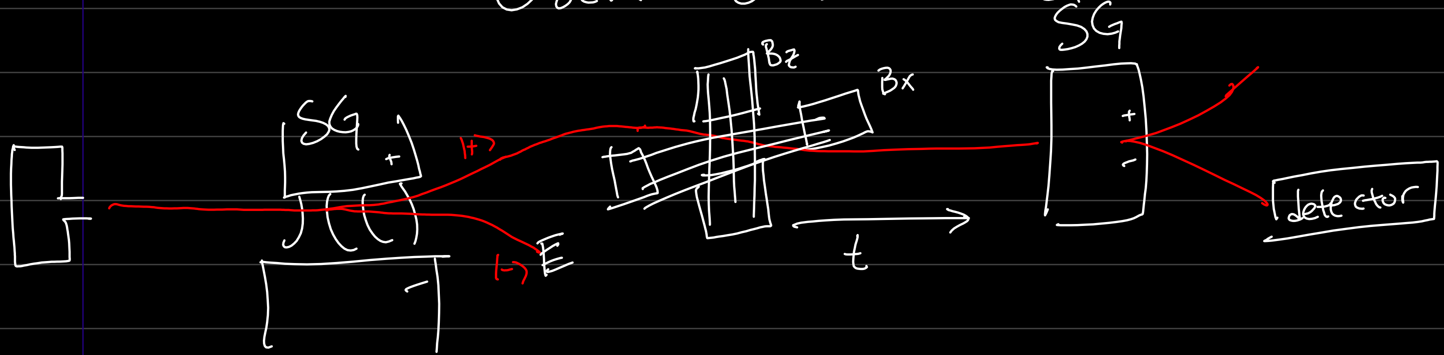
$$= \underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}_{\frac{\text{sen}^2\theta}{4}}\,\frac{1}{4}\,\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\omega_z^2+\omega_x^2}\;t\right)$$

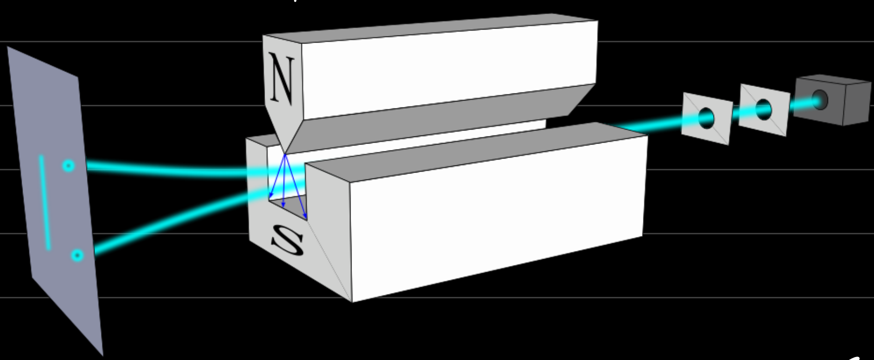
$$H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\omega_z & \omega_x \\ \omega_x & -\omega_z\end{pmatrix}$$

$|+\rangle,\ |-\rangle$



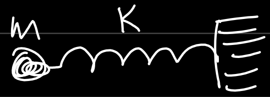
Oscilaciones de Rabi





Experimento de Stern-Gerlach

Oscilador armónico cuántico



- $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
- $F = -\frac{dV}{dx} = -kx$
- $\omega = \sqrt{k/m}$

Cualquier potencial alrededor de un mínimo local x_0 se puede aproximar por un potencial armónico:

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{V''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

- El OAC. es la base para describir cuánticamente al campo EM.
- Fue el oscilador armónico lo que llevó a Planck a definir h para describir la radiación de un cuerpo negro.

Oscilador armónico clásico:

- $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- Solución $x(t) = x_M \cos(\omega t - \varphi)$
- x_M, φ ctes que dependen de la condición inicial.
- Energía $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$
- Al sustituir la solución en $E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_M$

Descripcion cuántica

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

- No depende de $t \rightarrow$ los e-estados de H nos dan mucha información

Buscamos E y $|\psi\rangle$ tales que $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

En la representación $\{|x\rangle\}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Podríamos resolver esta ecuación con métodos de ecs. diferenciales pero haremos otra cosa.

Las soluciones serían polinomios de Hermite.