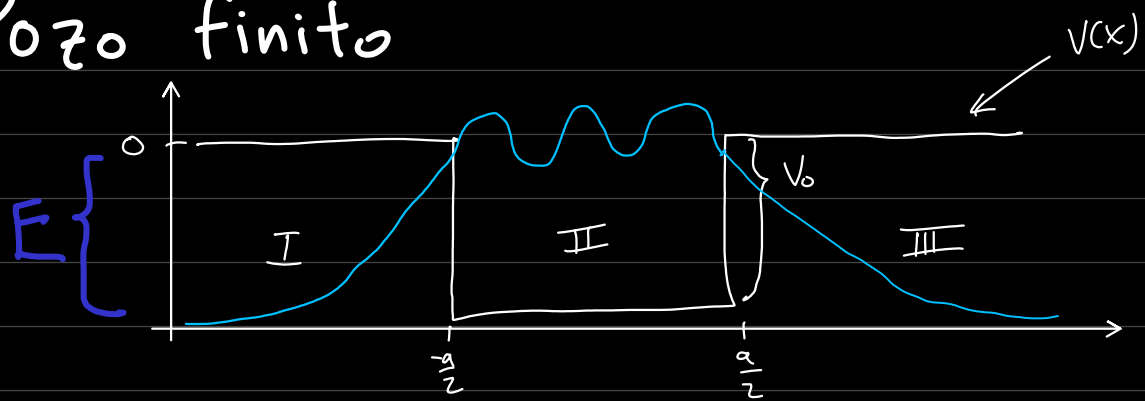


Pozo finito



Caso $-V_0 < E < 0$

$$\psi_I(x) = B_1 e^{\beta x} + B_1' e^{-\beta x}$$

$$\psi_{II}(x) = A_2 e^{ikx} + A_2' e^{-ikx}$$

$$\psi_{III}(x) = B_3 e^{\beta x} + B_3' e^{-\beta x}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Como ψ debe ser acotada en $x \rightarrow \pm\infty$ (para $\langle \psi | \psi \rangle < \infty$)

Usando las condiciones de frontera de $\psi(x)$ continua y $\psi'(x)$ continua obtenemos B_1, A_2, A_2', B_3, E
5 incógnitas.

Por cada frontera obtenemos 2 ecuaciones
2 fronteras $\rightarrow$ 4 ecuaciones

Cómo obtenemos la 5a ecuación?

Usando $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ es la 5a ecuación.

En $-\frac{a}{2}$ frontera I y II

$$\psi_I(-\frac{a}{2}) = \psi_{II}(-\frac{a}{2}) \Rightarrow B_1 e^{-\beta \frac{a}{2}} = A_2 e^{-ik \frac{a}{2}} + A_2' e^{ik \frac{a}{2}} \dots (1)$$

$$\psi_I'(-\frac{a}{2}) = \psi_{II}'(-\frac{a}{2}) \Rightarrow B_1 \beta e^{-\beta \frac{a}{2}} = A_2 i k e^{-ik \frac{a}{2}} - A_2' i k e^{ik \frac{a}{2}}$$

$$\frac{1}{ik} B_1 \beta e^{-\beta \frac{a}{2}} = A_2 e^{-ik \frac{a}{2}} - A_2' e^{ik \frac{a}{2}} \dots (2)$$

sumando/restando (2) de (1)

$$(+) B_1 e^{-\frac{\rho a}{2}} \left(1 + \frac{\rho}{ik}\right) = 2A_2 e^{-ik\frac{a}{2}} ; (-) B_1 e^{-\frac{\rho a}{2}} \left(1 - \frac{\rho}{ik}\right) = 2A'_2 e^{ik\frac{a}{2}}$$

$$A_2 = B_1 e^{(-\rho + ik)\frac{a}{2}} \frac{ik + \rho}{2ik} \quad \text{despejando } A_2$$

$$A'_2 = B_1 e^{(-\rho - ik)\frac{a}{2}} \frac{ik - \rho}{2ik} \quad \text{despejando } A'_2$$

Conjugados

Escogiendo B_1 real (lo podemos hacer porque la fase)
entonces $A_2 = A'_2$ global se puede escoger

E_n $\frac{a}{2}$ frontera II y III

$$\varphi_{II}(\frac{a}{2}) = \varphi_{III}(\frac{a}{2}) \Rightarrow A_2 e^{ik\frac{a}{2}} + A'_2 e^{-ik\frac{a}{2}} = B'_3 e^{-\rho\frac{a}{2}}$$

$$\varphi'_{II}(\frac{a}{2}) = \varphi'_{III}(\frac{a}{2}) \Rightarrow A_2 ik e^{ik\frac{a}{2}} - A'_2 ik e^{-ik\frac{a}{2}} = -B'_3 \rho e^{-\rho\frac{a}{2}}$$

$$A_2 e^{ik\frac{a}{2}} - A'_2 e^{-ik\frac{a}{2}} = -\frac{1}{ik} B'_3 \rho e^{-\rho\frac{a}{2}}$$

$$(+) 2A_2 e^{ik\frac{a}{2}} = B'_3 e^{-\rho\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{1}{ik}\rho\right) \Rightarrow A_2 = B'_3 e^{(-\rho - ik)\frac{a}{2}} \frac{ik - \rho}{2ik}$$

$$(-) 2A'_2 e^{-ik\frac{a}{2}} = B'_3 e^{-\rho\frac{a}{2}} \left(1 + \frac{1}{ik}\rho\right) \Rightarrow A'_2 = B'_3 e^{(-\rho + ik)\frac{a}{2}} \frac{ik + \rho}{2ik}$$

de la frontera I-II

$$\begin{cases} A_2 = B_1 e^{(-\rho - ik)\frac{a}{2}} \frac{ik - \rho}{2ik} \\ A'_2 = B_1 e^{(-\rho + ik)\frac{a}{2}} \frac{ik + \rho}{2ik} \end{cases}$$

$$\text{Haciendo } A_2 = A'_2 \Rightarrow \frac{B'_3}{B_1} = e^{-ika} \left(\frac{ik - \rho}{ik + \rho}\right)$$

$$A'_2 = A_2 \Rightarrow \frac{B'_3}{B_1} = e^{ika} \left(\frac{ik + \rho}{ik - \rho}\right)$$

$$k = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\rho = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow e^{-ika} \left(\frac{ik - \rho}{ik + \rho}\right) = e^{ika} \left(\frac{ik + \rho}{ik - \rho}\right) \Rightarrow e^{2ika} = \left(\frac{ik - \rho}{ik + \rho}\right)^2$$

Resolver esta ecuación nos dará los valores permitidos de E .

Si sacamos raíz salen los casos

$$i) \frac{\rho - ik}{\rho + ik} = -e^{ika}$$

$$ii) \frac{\rho - ik}{\rho + ik} = e^{ika}$$

Escribiendo $e^{ika} = \cos(ka) + i \sin(ka)$

i) $\rho/k = \tan\left(\frac{ka}{2}\right)$

ii) $\rho/k = -\cot\left(\frac{ka}{2}\right)$

