

Revisar 1b
 2c especificar que son funciones reales.

Interferencia cuántica

$$|\psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$$

Observable $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$

- forma equivocada de interpretar a $|\psi\rangle$

N copias, $|\lambda_1|^2 N$ están $|\psi_1\rangle$ y $|\lambda_2|^2 N$ están en $|\psi_2\rangle$.

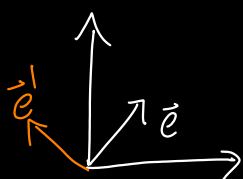
Probabilidad de medir A y obtener a_n como resultado

$$P_\psi(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2 = |\lambda_1|^2 \overbrace{|\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2}^{P_1(a_n)} + |\lambda_2|^2 P_2(a_n) + \underbrace{2 \operatorname{Re}\{\lambda_1 \lambda_2^* \langle u_n | \psi_1 \rangle \langle u_n | \psi_2 \rangle^*\}}_{\text{término de interferencia.}}$$

parte real.

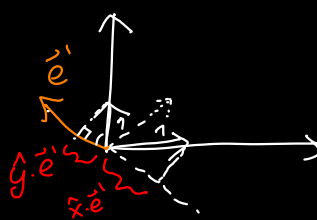
Analogía de óptica.

- Luz linealmente polarizada en la dirección $\vec{e} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$



$$\vec{e} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

Al medir con polarizador en dir $\vec{e}'$ obtenemos nada



La mitad de la luz en $\hat{x}$ y la otra en $\hat{y}$

Al medir con polarizador en dir $\vec{e}'$ obtenemos la mitad (en intensidad)

Polarización $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y})$ lineal ↗

$\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y})$ lineal ↖

$\hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y})$ circular ↻

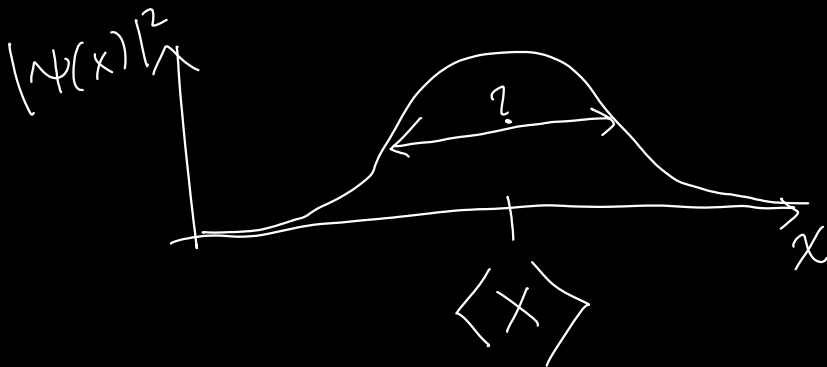
$\hat{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y})$ circular ↺

Desviación RMS (root-mean-squared)

- $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ valor promedio

resultante de medir A muchas veces si el sistema está en estado $|\psi\rangle$.

- Centro de masa de resultados obtenidos



$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int \psi^*(x) x \psi(x) dx \\ &= \int \underbrace{|\psi(x)|^2}_{} x dx \end{aligned}$$

- ¿Cómo caracterizar la dispersión de los resultados?

- Ingenuamente $\langle A - \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle - \langle A \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \psi | A - \langle A \rangle | \psi \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle - \langle A \rangle \langle \psi | \psi \rangle \\ &= \langle A \rangle - \langle A \rangle = 0 \end{aligned}$$

- 2o intento

$$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \equiv (\Delta A)^2$$

definición
desviación RMS

$$\Rightarrow \Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$$

$$\begin{aligned}\Delta A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - \underbrace{A\langle A \rangle}_{\text{escalar}} - \underbrace{\langle A \rangle A}_{\text{escalar}} + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 \\ &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

- Aplicado a P_x y X

$$- [X, P_x] = i\hbar \quad \left(\text{esto salió de suponer que } \text{TF}\{\psi(x)\} = \psi(\vec{p}) \right)$$

$$- \text{Queremos ver que } \Delta X \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$- \text{Considerar } |\varphi\rangle = (X + i\lambda P_x)|\psi\rangle \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$- \text{Sabemos que } \langle \varphi | \varphi \rangle \geq 0$$

$$\begin{aligned}\langle \varphi | \varphi \rangle &= \langle \psi | (X - i\lambda P_x)(X + i\lambda P_x) | \psi \rangle \\ &= \langle X^2 \rangle + \underbrace{i\lambda \langle X P_x \rangle - i\lambda \langle P_x X \rangle}_{i\lambda \langle X P_x - P_x X \rangle} + \lambda^2 \langle P_x^2 \rangle \\ &\quad \underbrace{[X, P_x]}_{i\hbar}\end{aligned}$$

$$= \langle X^2 \rangle - \hbar\lambda + \lambda^2 \langle P_x^2 \rangle \geq 0$$

polinomio respecto a λ

- Es una parábola. Para que siempre sea ≥ 0 es necesario que la parábola no toque al eje horizontal.

$$ax^2 + bx + c$$

- El discriminante $b^2 - 4ac \leq 0$ con $\begin{cases} b = -\hbar \\ a = \langle P_x^2 \rangle \\ c = \langle X^2 \rangle \end{cases}$

$$\hbar^2 - 4 \langle P_x^2 \rangle \langle X^2 \rangle \leq 0 \Rightarrow \underline{\langle P_x^2 \rangle \langle X^2 \rangle} \geq \frac{\hbar^2}{4} (*)$$

- Para un $|\psi\rangle$ definido $\langle \psi | P_x | \psi \rangle = \langle P_x \rangle$; $\langle \psi | X | \psi \rangle = \langle X \rangle$

$$X' = X - \langle X \rangle \quad P'_x = P_x - \langle P_x \rangle \Rightarrow [X', P'_x] = i\hbar$$

$$\begin{aligned} \text{Porque } [X - \langle X \rangle, P_x - \langle P_x \rangle] &= [X, P_x - \langle P_x \rangle] - [\langle X \rangle, P_x - \langle P_x \rangle] \\ &= [X, P_x] - [X, \langle P_x \rangle] \\ &= i\hbar \end{aligned}$$

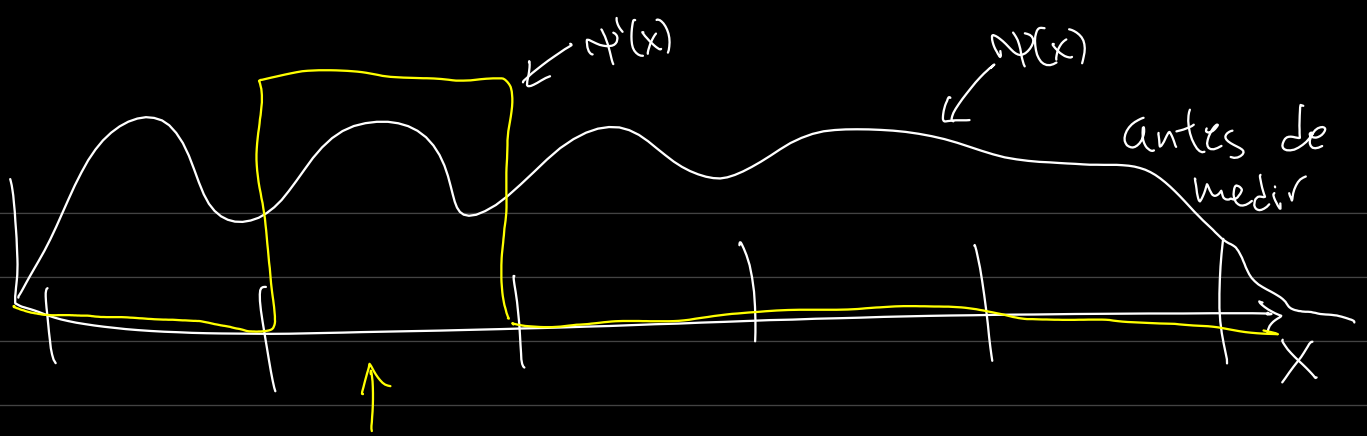
$$\text{Aplicando } (*) \text{ a } X' \text{ y } P'_x \Rightarrow \langle (P_x - \langle P_x \rangle)^2 \rangle \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\therefore \Delta P_x^2 \Delta X^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta P_x \Delta X \geq \frac{\hbar}{2}} \quad \square$$

Relación de incertidumbre

Ejemplo. partícula con $\Delta x = 0$ $\psi(x) = \delta(x - x_0)$

$$\Rightarrow \psi(p) \sim e^{-\frac{i}{\hbar} p x_0}$$



Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*
(Received March 25, 1935)