# Propiedades generales de sistemas cuánticos

## Sistemas conservativos

hamiltoniano

- Sistemas en los que $H$ no depende de $t$
- La energía se conserva
- Que $H$ no dependa de $t$ no implica que las soluciones no dependan de $t$.

- Consideremos, $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$ su ec. de e-valores.
  - Como $H$ no depende de $t$ entonces $E_n$ y $|\varphi_n\rangle$ tampoco
  - Como $H$ es hermitiano, podemos tener una base ortonormal de eigenvectores de $H$.

- Cualquier estado $|\Psi(t)\rangle$ puede escribirse como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)|\varphi_n\rangle \quad \text{con} \quad C_n(t) = \langle\varphi_n|\Psi(t)\rangle$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\overbrace{\langle\varphi_n|\Psi(t)\rangle}^{C_n(t)} = \langle\varphi_n|H|\Psi(t)\rangle \Rightarrow i\hbar\dot{C}_n(t) = E_nC_n(t)$$

$$\dot{C}_n(t) = -\frac{i}{\hbar}E_nC_n(t)$$

$$\Rightarrow \quad C_n(t) = C_n(t_0)\,e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}$$

Receta para encontrar la evolución temporal de un sistema cuántico conservativo.

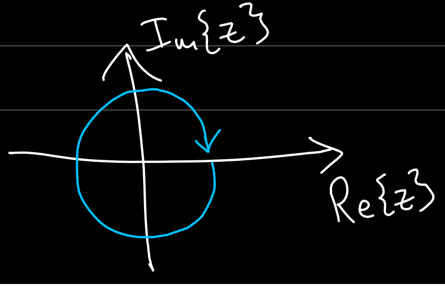
0) Obtener e-vectores y e-valores de $H$.
1) Escribir $|\Psi(t_0)\rangle$ en términos de la base de e-vectores de $H$

condición inicial

$$|\Psi(t_0)\rangle = \sum_n C_n(t_0)|\varphi_n\rangle$$

2) Obtenemos $|\Psi(t)\rangle$ como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t_0)\,e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}|\varphi_n\rangle$$



- Si la condición inicial $|\psi(t_0)\rangle$ es un e-vector de $H$

$$|\psi(t_0)\rangle = |\varphi_n\rangle \implies |\psi(t)\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}|\varphi_n\rangle$$

$\therefore$ Es un estado estacionario.

$\therefore$ Los eigenestados de $H$ son estacionarios.

- Ojo: combinaciones lineales de estados de $H$ no son estacionarias

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|\varphi_0\rangle + |\varphi_1\rangle}{\sqrt{2}} \implies |\psi(t)\rangle = \frac{e^{-iE_0t/\hbar}|\varphi_0\rangle + e^{-iE_1t/\hbar}|\varphi_1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \underbrace{e^{-iE_0t/\hbar}}_{\text{fase global}}\left[\frac{|\varphi_0\rangle + e^{-i(E_1-E_0)t/\hbar}|\varphi_1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

fase relativa

queda la dependencia temporal

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t_0)\, e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}|\varphi_n\rangle$$

# Constantes de movimie o

Definición:

- Una const. de movimient es un observable que no depende explícitamente de tiempo y que conmuta con $H$.

Emmy Noether

Cada cantidad conservada (constante de mov.) está asociada a una simetría

$E \to$ translación temporal, $\vec{L} \to$ rotacion

$\vec{p} \to$ translación espacial

- En un sistema conservativo, $H$ es una const. de mov.

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \quad ; \quad [H,H]=HH-HH=0$$

- Si $A$ es const. de mov.

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\cancelto{0}{\langle[A,H]\rangle}+\cancelto{0}{\left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle}=0$$

$$\Rightarrow \langle A\rangle \text{ es constante.}$$

- Para una const. de mov $A$, $[A,H]=0$ y por tanto, podemos construir una base de e-vectores comunes a $A$ y $H$.

$$H|\phi_{n,p}\rangle = E_n|\phi_{n,p}\rangle$$
$$A|\phi_{n,p}\rangle = a_p|\phi_{n,p}\rangle$$

- Entonces un e-vector de $A$ será e-vector de $H$ y por lo tanto será estacionario.

$$\underbrace{|\psi\rangle \text{ e-vector de } H \Rightarrow |\psi\rangle \text{ es estacionario}}$$

$$[A,H]=0 \Rightarrow |\psi\rangle \text{ e-vector de } A \Rightarrow |\psi\rangle \text{ e-vector de } H \Rightarrow |\psi\rangle \text{ es estacionario}$$

- Si medimos $A$ varias veces, obtendremos el mismo resultado todas las veces.
- En este caso a $a_p$ se le llama un "buen número cuántico".

- La probabilidad de obtener $a_p$ no cambia cuando está en un e-vector de $A$ pues

$$C_{n,p}(t)=C_{n,p}(t_0)\,e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} \Rightarrow \mathcal{P}(a_p,t)=|C_{n,p}(t)|^2=|\underbrace{C_{n,p}(t_0)}_{\text{no depende de } t}|^2$$

# Interferencia Cuántica

- Consideramos dos estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ ortonormales.

- Consideramos un observable $A$ y sus e-vectores $|u_n\rangle$ con e-valores $a_n$ $\quad A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$ (discreto, no degenerado)

La prob. de obtener $a_n$ como resultado cuando el sistema está en los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$

$$P_1(a_n) = |\langle u_n|\psi_1\rangle|^2$$

$$P_2(a_n) = |\langle u_n|\psi_2\rangle|^2$$

$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$

- Ahora consideramos el estado $|\psi\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$
  - Si el sistema esta en el estado $|\psi\rangle$

¿Que prob. hay de encontrarlo en $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$?

Hay una prob $|\lambda_1|^2$ de encontrarlo en $|\psi_1\rangle$ y una prob $|\lambda_2|^2$ de encontrarlo en $|\psi_2\rangle$

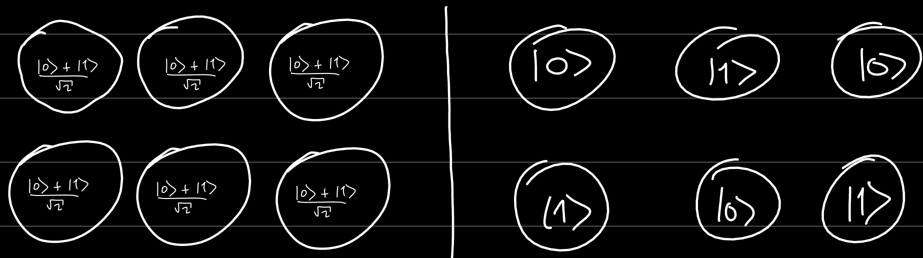
- Podriamos pensar que si el sistema esta en $|\psi\rangle$

$$P_\psi(a_n) = |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n)$$

$0 \to +$

$y \to x$

Un poco más concreto $\qquad \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$




estado de superposición $\qquad$ mezcla estadística

Por otro lado, de acuerdo a postulados

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\psi}(a_n) &= |\langle u_n|\psi\rangle|^2 = |\lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 \\
&= |\lambda_1|^2|\langle u_n|\psi_1\rangle|^2 + |\lambda_2|^2|\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 + 2\,\mathrm{Re}\{\lambda_1\lambda_2^*\langle u_n|\psi_1\rangle\langle u_n|\psi_2\rangle^*\} \\
&= |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2\mathcal{P}_2(a_n) + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\{\lambda_1\lambda_2^*\langle u_n|\psi_1\rangle\langle u_n|\psi_2\rangle^*\}}_{\text{término de interferencia}}
\end{aligned}
$$

En comparación a la suposición ingenua $\left(\mathcal{P}_{\psi}(a_n) = |\lambda_1|^2\mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2\mathcal{P}_2(a_n)\right)$ nos aparece un término de interferencia.