50 Participants

Resultados importantes de los operadores $\vec{R}$ y $\vec{P}$

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$$
$$\psi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

- $\psi(\vec{p}) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \psi(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\, d^3r$
- $\psi(\vec{r}) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \psi(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\, d^3p$
- $\langle \vec{p} | \vec{r} \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$
- $\langle x | X | \psi \rangle = x\, \psi(x)$ 1D
- $\langle \vec{r} | X | \psi \rangle = x\, \psi(\vec{r})$ 3D
- $\langle \vec{r} | \vec{R} | \psi \rangle \doteq \vec{r}\, \psi(\vec{r})$
- $\langle x | P_x | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$ 1D
- $\langle \vec{r} | \vec{P} | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(\vec{r})$

$$[X, P_x] = i\hbar$$

—

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad ; \quad H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec{R})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t)$$

Notación

$\lvert\varphi\rangle$	$\langle\varphi\rvert$	$\langle\varphi\lvert\psi\rangle$	$c\lvert\varphi\rangle\langle\psi\rvert \xleftrightarrow{\text{adjunto}} c^*\lvert\psi\rangle\langle\varphi\rvert$
vector	vector dual	escalar	operador $\longleftrightarrow$ operador

¿Como se ve la ec. de Schrödingen en la base $\{|\vec{P}\rangle\}$?

¿Qué le hace P_x a $\psi(\vec{p})$?

$$\langle \vec{p} | P_x | \psi \rangle = p_x \langle \vec{p} | \psi \rangle = p_x \psi(\vec{p})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad ; \quad H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec{R})$$

En la base de momento

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \vec{p} | \psi(t) \rangle = \langle \vec{p} | \frac{P^2}{2m} | \psi(t) \rangle + \langle \vec{p} | V(\vec{R}) | \psi(t) \rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{p}, t) = \left(\frac{p^2}{2m} \psi(\vec{p}, t) + \langle \vec{p} | V(\vec{R}) | \psi(t) \rangle \right)$$

$$\langle \vec{p} | V(\vec{R}) \overset{\int d^3p' |\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|}{\downarrow} | \psi(t) \rangle = \int d^3p' \langle \vec{p} \overset{\int d^3r |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|}{\downarrow} | V(\vec{R}) \overset{\int d^3r' |\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|}{\downarrow} | \vec{p}' \rangle \overbrace{\langle \vec{p}' | \psi(t) \rangle}^{\psi(\vec{p}', t)}$$

$$= \iiint d^3p' \, d^3r \, d^3r' \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle \overbrace{\langle \vec{r} | V(\vec{R}) | \vec{r}' \rangle}^{V(\vec{r}) \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle} \langle \vec{r}' | \vec{p}' \rangle \psi(\vec{p}', t)$$

$$= \iiint d^3p' \, d^3r \, d^3r' (2\pi\hbar)^{-3} V(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - \vec{p}'\cdot\vec{r}')} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \psi(\vec{p}', t)$$

$$= \iint d^3p' \, d^3r \, (2\pi\hbar)^{-3} V(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}')\vec{r}} \psi(\vec{p}', t)$$

$$= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p' \, \psi(\vec{p}', t) \underbrace{\left[(2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3r \, \underbrace{V(\vec{r})}_{f} \, e^{-\frac{i}{\hbar}\underbrace{(\vec{p} - \vec{p}')}_{k} \cdot \overset{x}{\vec{r}}} \right]}_{\text{Transformada de Fourier de } V(\vec{r})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ixk} dx$$

$$= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p' \, \psi(\vec{p}', t) \, \tilde{V}(\vec{p} - \vec{p}')$$

Ecuación de Schrödinger en la representación $\vec{p}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{p}, t) = \left[\frac{p^2}{2m} \psi(\vec{p}, t) + (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p' \, \psi(\vec{p}', t) \, \tilde{V}(\vec{p} - \vec{p}') \right]$$

transformada de Fourier de $V(\vec{r})$

Consecuencias de los postulados de la M.C.

① Estado es un ket $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$

② Observables son operadores hermitianos $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

③ Los posibles resultados de medir A son sus e-valores.

④ Para un observable $A|\phi_n\rangle = a_n |\phi_n\rangle$ ← e-vector

e-valor

Prob. de obtener a_n como resultado es

$$P(a_n) = |\langle \phi_n | \psi \rangle|^2$$

⑤ Al medir y obtener a_n $\quad |\psi\rangle \longrightarrow |\phi_n\rangle$

⑥ $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$

— El ④ nos permite interpretar el significado de $\psi(\vec{r})$, $\psi(\vec{p})$

— Por ③ obtendremos que algunas cantidades físicas estarán cuantizadas.

- Para verificar esta teoría es necesario repetir un experimento $N \to \infty$ veces pues sólo nos da información probabilística.

- El valor promedio de medir un observable A $\boxed{A|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle}$ cuando el sistema está en un estado $|\psi\rangle$ $\langle A\rangle_\psi$ se define como el promedio de los resultados cuando $N \to \infty$ mediciones son realizadas sobre un sistema en estado $|\psi\rangle$.

¿Cómo calculamos $\langle A\rangle_\psi$?

- Consideremos A con espectro discreto y no degenerado.
- Consideremos $|\psi\rangle$ está normalizado.
- Si hacemos N mediciones el resultado a_n sale $\mathcal{N}(a_n)$ veces

$$- \frac{\mathcal{N}(a_n)}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} P(a_n)$$

$$- \sum_n \mathcal{N}(a_n) = N$$

$$\Rightarrow \quad \langle A\rangle_\psi = \sum_{\#\text{e-vals}} a_n \frac{\mathcal{N}(a_n)}{N} \underset{N\to\infty}{=} \sum a_n P(a_n)$$

valor promedio

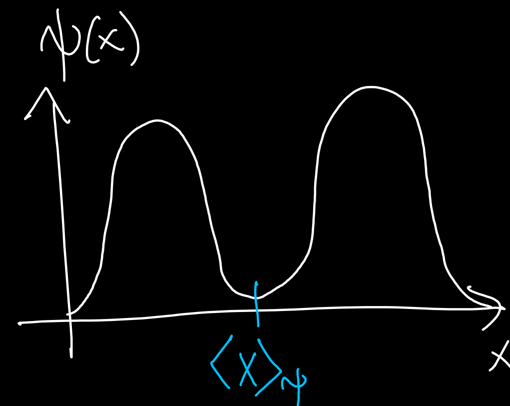
valor esperado

$$= \sum a_n |\langle \phi_n|\psi\rangle|^2$$

$$= \sum a_n \langle \psi|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi| \Bigg(\underbrace{\sum_{\text{e-vals}} a_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|}_{A} \Bigg) |\psi\rangle$$

$$= \langle \psi|A|\psi\rangle$$



Ejemplos:

$$\langle X\rangle_\psi = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\, x\, \psi(\vec{r})$$

$$\langle P_x\rangle_\psi = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r}) \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{r})$$

$$= \int d^3\vec{p}\, \psi^*(\vec{p})\, p_x\, \psi(\vec{p})$$

Consecuencias de la Ec. de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

- De primer orden en t.
- Determinista: Dado un $|\psi(t_0)\rangle$, nos da $|\psi(t)\rangle$ a cualquier tiempo t.
- En la repr. $\{|\vec{r}\rangle\}$ la condición inicial es una $\psi(\vec{r}, t_0)$ y con eso obtienen $\psi(\vec{r}, t)$ para $t > t_0$.