$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

Para una partícula en un potencial

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec{R})$$

¿Cómo son los operadores $\vec{P}$ y $\vec{R}$?

Los operadores $\vec{R}$ y $\vec{P}$

$\vec{R} = (X, Y, Z)$ observable

$X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Como X es un observable, podemos construir una base de e-vectores.

ecuación de eigenvalores

$$X|x\rangle = x|x\rangle$$

eigenvector (etiquetamos al e-vector usando el e-valor)

operador de posición en X.

Los e-valores son posiciones

Hay tantos valores de x como puntos en $\mathbb{R}$ así que la dimensión de $\mathcal{H}$ es infinita.

X es un ejemplo de un operador con espectro continuo.

El espectro de X es $\mathbb{R}$.

- Cumple las propiedades de bases continuas de las que habíamos hablado

$$\int dx\, |x\rangle\langle x| = \mathbb{1} \qquad \langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$$

- La función de onda son los coeficientes necesarios para escriblir un estado $|\psi\rangle$ en la base $\{|x\rangle\}$.

función de onda

$$\boxed{|\psi\rangle} = \int dx\, \psi(x)\, |x\rangle \quad ; \quad \underline{\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle}$$

$$- \langle\psi|\psi\rangle = \int dx\, \overbrace{\langle\psi|x\rangle}^{\psi^*(x)}\overbrace{\langle x|\psi\rangle}^{\psi(x)} = \int \psi^*(x)\,\psi(x)\, dx = \int |\psi(x)|^2 dx$$

$\mathbb{1}$

Como queremos norma de $|\psi\rangle \to \langle\psi|\psi\rangle < \infty \Rightarrow \psi \in \mathcal{L}^2$ para que esté bien definido.

$$- \langle\phi|\psi\rangle = \int dx \langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int \phi^*(x)\psi(x)\, dx$$

- Esto fue X, ¿Qué es $\vec{R} = (X, Y, Z)$?

$\underline{\vec{R}|\vec{r}\rangle = \vec{r}\,|\vec{r}\rangle}$ es una manera corta de escribir

Notación abusada $\vec{r} = (x, y, z)$

$$X|(x,y,z)\rangle = x|(x,y,z)\rangle$$

$$Y|(x,y,z)\rangle = y\,|(x,y,z)\rangle$$

$$Z|(x,y,z)\rangle = z|(x,y,z)\rangle$$

$$X|\vec{r}\rangle = x|\vec{r}\rangle$$

$\{|\vec{r}\rangle\}$ es una base de e-vectores comunes para X, Y, Z.

- En 3D, la función de onda es $\psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle$

También hay relación de ortonormalidad $\langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$

y de completez $\int d^3r\, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = \underline{\mathbb{1}}$

¿Qué significa $\psi(\vec{r})$?

Por postulado 4: La densidad de prob de encontrar a la partícula en un volumen d^3r en $\vec{r}$ es $|\psi(\vec{r})|^2$

El operador de momento P

- $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$
- Base de eigenvectores

$1D: \quad P_x |p_x\rangle = p_x |p_x\rangle \qquad \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$

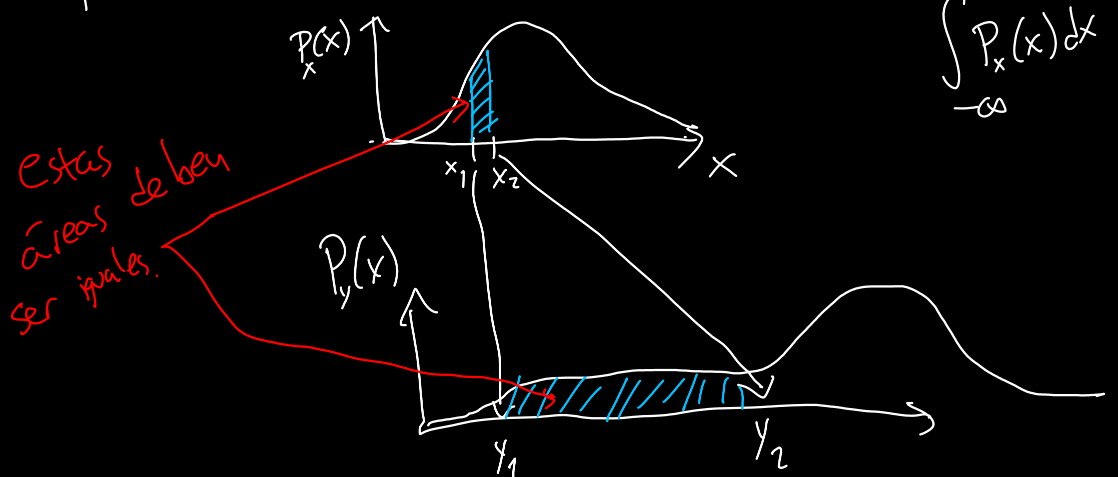
$3D: \quad P_x |\vec{p}\rangle = p_x |\vec{p}\rangle$

- $\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$
- $\int d^3p \, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = \mathbb{1}$

$$\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k} \qquad p = \frac{h}{\lambda}} \quad \psi_k(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi_r(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, d^3r$$

Cambio de variable en una función de densidad de probabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x)\, dx = 1$$



Si la queremos escribir en términos de otra variable $y = y(x)$ para obtener $P_y(y)$.

Se debe cumplir que

$$\int_{x_1}^{x} P_x(x')\, dx' = \int_{y_1}^{x} P_y(y(x'))\, dx'$$

Derivando respecto a x

$$P_x(x) = P_y(y(x)) \frac{dy}{dx}$$

Usando esto en 1D $p(k)=\hbar k \Rightarrow \psi_k(k)=\psi_p(p)\sqrt{\underbrace{\frac{dp}{dk}}_{\hbar}}$ Ponemos la $\sqrt{\ }$ porque $|\psi_x(x)|^2=P_x(x)$

$$\psi_k(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\psi_x(x)e^{-ik\cdot x}dx \rightarrow \psi_p(p)=\frac{1}{\sqrt{\hbar}}\psi_k\left(\frac{p_x}{\hbar}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi_x(x)e^{\frac{-ip_x x}{\hbar}}dx$$

$$\psi_p(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\,\psi_r(\vec{r})\,e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (*)$$

¿Qué unidades tiene $\psi(\vec{r})$?

¿Tiene unidades?

$\int|\psi(\vec{r})|^2d^3r$ es adimensional.

$[d^3r]=L^3$ $\quad [\psi(\vec{r})]=\frac{1}{L^{3/2}}$

¿Cómo interpretar $\psi_p(\vec{p})$?

La densidad de probabilidad de que la partícula tenga momento $\vec{p}$ es $|\psi_p(\vec{p})|^2=|\langle p|\psi\rangle|^2$

Reescribiendo $(*)$

$$\langle\vec{p}|\psi\rangle=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r'\langle\vec{r}'|\psi\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}'}$$

En particular, para $|\psi\rangle=|\vec{r}\rangle$

$$\langle\vec{p}|\vec{r}\rangle=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r'\langle\vec{r}'|\vec{r}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}'}=(2\pi\hbar)^{-3/2}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

Cuál es la $\psi(p)$ para un estado cuya posición está perfectamente bien definida (ie. un e-estado de $\vec{R}$).

$$dP(\vec{p})=|\langle\vec{p}|\vec{r}\rangle|^2=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\cancel{|e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}|^2}^{\,1}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$$

¡ independiente de $\vec{p}$!