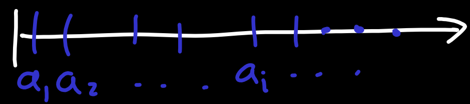
Postulados de Mecánica Cuántica II

(4.1) (Espectro discreto y no degenerado)

espectro



Observable A con $A|e_i\rangle = a_i|e_i\rangle$

Para $|\psi\rangle = c_1|e_1\rangle + c_2|e_2\rangle + \cdots + c_N|e_N\rangle$

La probabilidad de obtener el resultado a_i al medir el sistema es

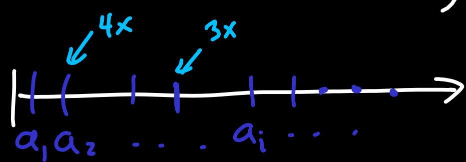
Proyector a estado $|e_i\rangle$

$$\mathcal{P}(a_i) = |c_i|^2 = |\langle e_i|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|P_{|e_i\rangle}|\psi\rangle$$

(4.2) (Espectro discreto y degenerado)

- Varios e-vectores comparten e-valor.
- e-valores se repiten

espectro



A varios e-vectores ortonormales $|e_i^n\rangle$ con $n = 1, \ldots, g_i$ les corresponde el e-valor a_i.

a qué e-valor corresponden

$$A|e_i^n\rangle = a_i|e_i^n\rangle$$

de veces que se repite el e-valor i

Podemos escribir al estado como

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |e_i^n\rangle$$

En este caso, la probabilidad de obtener a_i como resultado de una medición es:

$$\mathcal{P}(a_i) = \sum_{n=1}^{g_i} |c_i^n|^2 = \sum_{n=1}^{g_i} |\langle e_i^n|\psi\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{g_i} \langle\psi|e_i^n\rangle\langle e_i^n|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\left(\sum_{n=1}^{g_i} |e_i^n\rangle\langle e_i^n|\right)|\psi\rangle$$

$$= \langle \psi | P_{a_i} | \psi \rangle$$

Proyector a eigenespacio de a_i

4.3 (espectro continuo y no degenerado)

espectro 

$$A|V_\alpha\rangle = \alpha|V_\alpha\rangle \qquad |\psi\rangle = \int d\alpha\, c(\alpha)\, |V_\alpha\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

- Los resultados posibles son un continuo.
- Lo que nos interesa es la densidad de probabilidad de obtener un resultado entre α y $\alpha + d\alpha$

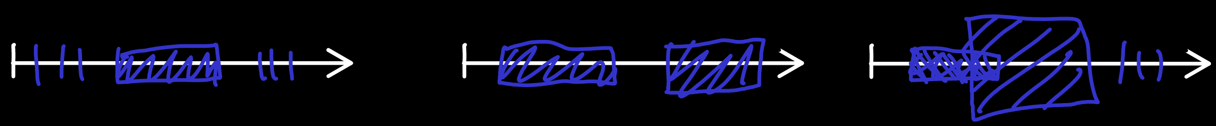
densidad de probabilidad de obtener un resultado en el intervalo $(\alpha, \alpha + d\alpha)$

$$d\mathcal{P}(\alpha) = |c(\alpha)|^2 = |\langle V_\alpha|\psi\rangle|^2$$

Probabilidad de obtener un resultado entre (α_1, α_2) es $\mathcal{P}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\mathcal{P}(\alpha)$

- $\mathcal{P}(\alpha, \alpha) = 0$

4.* Espectros posibles (infinitos)



5 Colapso del estado cuántico

i) Caso no degenerado

- Si medimos al sistema y obtenemos a_i como resultado y volvemos a medir el mismo observable inmediatamente despues, obtenemos el mismo resultado.

$$\underset{\text{antes}}{|\psi\rangle = \sum c_i |e_i\rangle} \xrightarrow[\substack{\text{medimos y} \\ \text{obtenemos} \\ a_i \text{ como} \\ \text{resultado}}]{} |\psi'\rangle = |e_i\rangle$$

- Con mediciones podemos preparar al sistema en algún estado conocido.

- El proceso de medición no depende de un observador consciente. Es más bien un efecto de sistema chico interactuando con sistema grande.

(caso degenerado)

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |e_i^n\rangle \xrightarrow[\substack{\text{medimos} \\ \text{y obtenemos} \\ a_i}]{} |\psi'\rangle = \frac{\sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |e_i^n\rangle}{\sqrt{\sum_{n=1}^{g_i} |c_i^n|^2}}$$

$$= \frac{P_i |\psi\rangle}{\text{su norma}}$$

proyector a eigenespacio correspondiente a a_i

(6) Evolución temporal

Si conocemos el vector de estado a un tiempo, podemos conocer su evolución en el tiempo usando la Ec. de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

Hamiltoniano

El hamiltoniano cuántico se obtiene del clásico reemplazando cantidades físicas por operadores

---

¿Cómo son los operadores asociados a observables?

- Hermitianos (para obtener valores $\mathbb{R}$ al medir)
- No conmutan necesariamente ($AB \neq BA$)
- El conmutador $[A,B] = AB - BA$

Teorema: Si $[A,B]=0$ y $|\psi\rangle$ es un e-vector de A entonces $B|\psi\rangle$ es e-vector de A.

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \implies BA|\psi\rangle = \lambda B|\psi\rangle$$

$[A,B]=0 \Rightarrow AB=BA$

$$\implies A(\underline{B|\psi\rangle}) = \lambda(\underline{B|\psi\rangle})$$

$\therefore B|\psi\rangle$ es e-vector de A

$\therefore B|\psi\rangle \in$ eigenespacio de λ

i) Si λ es no degenerado el eigenespacio es un rayo

$B|\psi\rangle = c|\psi\rangle$ i.e. $|\psi\rangle$ es e-vector de B

ii) $B|\psi\rangle \in$ eigenespacio de λ

Teorema Importante:

$[A,B]=0$ sii es posible construir una base ortonormal de e-vectores comunes a A y B.
(lo e-valores no tienen que ser comunes)

Corolario:
$[A,B]=0 \Rightarrow$ Podemos medir A y B simultáneamente.

Conjuntos Completos de Operadores que Conmutan.

Empecemos con ejemplos:

base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ ortonormales

estado $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle + d|3\rangle$

$$P = (|0\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|) - (|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|)$$

$P|0\rangle = |0\rangle\cancel{\langle 0|0\rangle}^{1} = |0\rangle \qquad P|1\rangle = -|1\rangle$

$P|2\rangle = |2\rangle \qquad P|3\rangle = -|3\rangle$

$\therefore \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ son e-vectores de P con e-valores $\{1, -1, 1, -1\}$ respectivamente

Si medimos P al sistema en estado $|\psi\rangle$ hay dos resultados posibles:

Si obtenemos $+1$ el estado colapsa a:

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'_+\rangle = \frac{a|0\rangle + c|2\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |c|^2}}$$

Si obtenemos -1 el estado colapsa a:

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'_-\rangle = \frac{b|1\rangle + d|3\rangle}{\sqrt{|b|^2 + |d|^2}} \qquad (*)$$

- ¿Podemos medir otra cosa para terminar de determinar el estado?

$$S = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) - (|2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|)$$

$+$ si $|0\rangle$ o $|1\rangle$ $\qquad -$ si $|2\rangle$ ó $|3\rangle$

Se puede ver que $[S, P] = 0$

Def

Un Conjunto Completo de Operadores que Conmutan (CCOC) $A_1, A_2, \dots, A_N$ cumple que

i) Conmutan por pares $([A_i, A_j] = 0)$

ii) Al especificar los e-valores de cada operador se determina de forma unívoca un e-vector.
(salvo por cte multiplicativa).

¿Cómo se obtuvo (*)?

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |e_i^n\rangle \xrightarrow[\text{y obtenemos } a_i]{\text{medimos}} |\psi'\rangle = \frac{\sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |e_i^n\rangle}{\sqrt{\sum_{n=1}^{g_i} |c_i^n|^2}}$$

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle + d|3\rangle$

P: $+$ $|0\rangle$ y $|2\rangle$ $\quad$ $-$ $|1\rangle, |3\rangle$

Si sale $+$

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \frac{a|0\rangle + c|2\rangle}{\text{su norma}}$$

$$= \frac{a|0\rangle + c|2\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |c|^2}}$$

$$\left(a^*\langle 0| + c^*\langle 2|\right)\left(a|0\rangle + c|2\rangle\right) =$$

$$\underbrace{a^* a}_{|a|^2} \cancelto{1}{\langle 0|0\rangle} + a^* c \cancelto{0}{\langle 0|2\rangle} + c^* a \cancelto{0}{\langle 2|0\rangle} + \underbrace{c^* c}_{|c|^2} \cancelto{1}{\langle 2|2\rangle} =$$

Otro ejemplo de CCOC

$$A = 4|0\rangle\langle 0| + 1|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2| + 3|3\rangle\langle 3|$$

$\{A\}$ es un CCOC

- Medir los observables en un CCOC determina el estado del sistema por completo.