Aclaración y resumen de clase anterior

Base $\{|u_i\rangle : i \in I\}$ ortonormal $\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$

$c_i = \langle u_i|\psi\rangle$ (* sólo para bases ortonormales)

i) $|\psi\rangle = \sum_i \underline{c_i} |u_i\rangle$

multiplicando por $\langle u_j|$ desde la izq.

$$\langle u_j|\psi\rangle = \sum_i c_i \overbrace{\langle u_j|u_i\rangle}^{\delta_{ij}} = c_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in I} |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle = \sum_{i\in I} \alpha_i^* \beta_i \quad (*)$$

Componentes de operadores

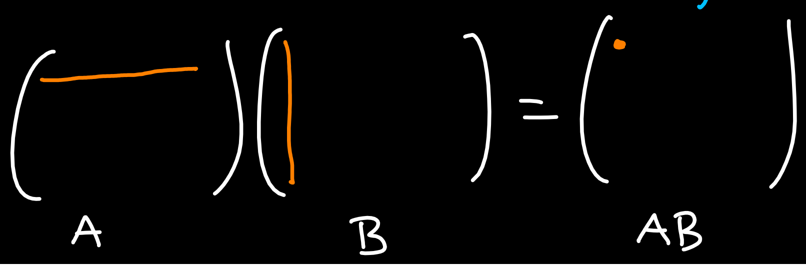
$$A_{ij} = \langle u_i|A|u_j\rangle \quad (*)$$

filas (i) columnas (j)

– Compontes de un producto de operadores

$$(AB)_{ij} = \langle u_i|A\underset{\mathbb{1}}{\,}B|u_j\rangle = \sum_k \underbrace{\langle u_i|A|u_k\rangle}_{A_{ik}}\underbrace{\langle u_k|B|u_j\rangle}_{B_{kj}}$$

$$= \sum_k A_{ik}B_{kj}$$



Ejemplo 1:

Base ortonormal $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ $\begin{cases} \langle a|a\rangle = 1 \\ \langle a|b\rangle = 0 \end{cases}$

$A = \underbrace{|a\rangle\langle b|}_{\text{operador}}$ ¿Cuál es la representación matricial de A?

$$A = \begin{pmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a|A|a\rangle & \langle a|A|b\rangle \\ \langle b|A|a\rangle & \langle b|A|b\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle a|A|a\rangle = \underbrace{\overset{1}{\langle a|a\rangle}}_{\text{número}}\underbrace{\overset{0}{\langle b|a\rangle}}_{\text{número}} = 0$$

Sólo $\langle a|A|b\rangle = \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle = 1 \neq 0$

Ejemplo 2:

Para la base $\overbrace{|a\rangle, |b\rangle, \ldots, |z\rangle}^{27 \text{ elementos}}$

$A = 3|a\rangle\langle z| + 2|b\rangle\langle b|$ matriz de 27×27

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 3 \\ 0\;2\;0 & & 0 \\ 0\;0\;0 & 0\;0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3:

Base ortonormal $\{|a\rangle, |b\rangle\}$

Componentes de los vectores base

$c_i = \langle a_i|\psi\rangle$

$\|\psi\rangle = \|a\rangle$	$\|\psi\rangle = \|b\rangle$
$c_0 = \langle a\|a\rangle = 1$	$c_0 = \langle a\|b\rangle = 0$
$c_1 = \langle b\|a\rangle = 0$	$c_1 = \langle b\|b\rangle = 1$
$\|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\|b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a|\psi\rangle \\ \langle b|\psi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a|\left(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle\right) \\ \langle b|\left(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle\right) \end{pmatrix}$$

$\langle a|b\rangle = 0$

$\langle a|a\rangle = 1$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Componentes del adjunto.

Def $\qquad A|\alpha\rangle \longleftrightarrow \langle\alpha|A^\dagger$

El operador adjunto $A^\dagger$ es aquel que hay que usar al escribir el conjugado hermitiano de $A|\alpha\rangle$ como $\langle\alpha|A^\dagger$

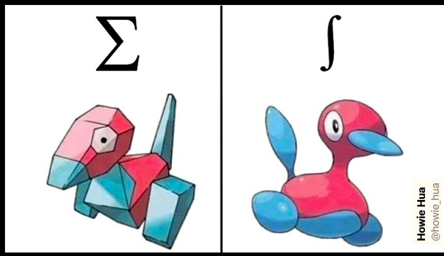
$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$

$$\left(A^\dagger\right)_{ij} = \langle u_i|A^\dagger|u_j\rangle = \Big(\underbrace{\langle u_j|A|u_i\rangle}_{A_{ji}}\Big)^* = \left(A_{ji}\right)^*$$

En matrices, hacer $\square^\dagger$ es transponer y calcular el complejo conjugado.

$\Rightarrow$ Un operador hermitiano cumple que $A = A^\dagger$ i.e. es igual a su transpuesto conjugado.

$\Rightarrow$ En un op. hermitiano. los elementos diagonales son reales.



Bases continuas

	Bases discretas	Bases continuas
Cardinalidad	finita, numerable	no numerable
forma	$\{\lvert u_i\rangle : i\in I \subset \mathbb{N}\}$	$\{\lvert\omega_\alpha\rangle : \alpha\in\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}\}$
ortonormal	$\langle u_i \vert u_j\rangle = \delta_{ij}$ Kronecker	$\langle \omega_\alpha \vert \omega_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha-\alpha')$ Dirac
Expansión en componentes	$\lvert\psi\rangle = \sum c_i \lvert u_i\rangle$ $c_j = \langle u_j \vert \psi\rangle$ Vector, sucesión	$\lvert\psi\rangle = \int d\alpha\, C(\alpha)\lvert\omega_\alpha\rangle$ $C(\alpha) = \langle\omega_\alpha\vert\psi\rangle$ función
Completez	$\sum \lvert u_i\rangle\langle u_i\rvert = \mathbb{1}$	$\int d\alpha\, \lvert\omega_\alpha\rangle\langle\omega_\alpha\rvert = \mathbb{1}$
Matrices	$A_{ij} = \langle u_i \vert A \vert u_j\rangle$	$A(\alpha,\alpha') = \langle\omega_\alpha\vert A\vert\omega_{\alpha'}\rangle$

Ejemplos de bases continuas $\{\lvert\vec r\rangle, \lvert\vec p\rangle\}$ $\quad \vec r\in\mathbb{R}^3$

$$\psi(\vec r) = \langle \vec r \vert \psi\rangle \quad ; \quad \psi(\vec p) = \langle \vec p \vert \psi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec r,t) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(r)\right)\psi(\vec r,t)$$

Proyectores

- hacia un vector

Son operadores que proyectan un vector hacia la dirección de otro

Para $|\psi\rangle$ normalizado $(\langle\psi|\psi\rangle = 1)$

Para normalizar

$$|\phi_N\rangle = \frac{|\phi\rangle}{\sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}}$$

$$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Si lo aplicamos al vector $|\phi\rangle$

$$P_\psi|\phi\rangle = \overbrace{|\psi\rangle}^{\text{vector}}\overbrace{\langle\psi|\phi\rangle}^{\text{escalar}}$$

(proporcional a $|\psi\rangle$ o paralelo)

- Notemos que $P_\psi^2 = |\psi\rangle\cancelto{1}{\langle\psi|\psi\rangle}\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi$

(proyectar dos veces es lo mismo que una vez)

- hacia un subespacio

En un espacio con base ortonormal $\{|u_1\rangle, \ldots, |u_N\rangle\}$ tomamos q vectores $(q \leq N)$

$$P_q = \sum_{i=1}^{q} |u_i\rangle\langle u_i|$$

(también cumple $P_q^2 = P_q$)

Ejemplo: Base $\underbrace{|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle}$

$$\begin{cases} \langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = \langle z|z\rangle = 1 \\ \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = \cdots \\ \ldots = \langle z|y\rangle = 0 \end{cases}$$

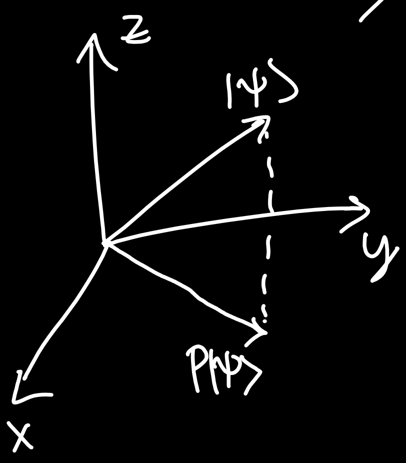
$$|\psi\rangle = \underbrace{a|x\rangle + b|y\rangle + c|z\rangle}$$

$$P = |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|$$

$$P|\psi\rangle = \left(|x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|\right)\left(a|x\rangle + b|y\rangle + c|z\rangle\right)$$

$\neq 0 \qquad \langle y|x\rangle = 0 \qquad \neq 0$

$$= a|x\rangle + b|y\rangle$$



Vectores y valores propios

Les había dicho que en general

$$A|\psi\rangle \neq c|\psi\rangle$$

Algunos operadores tienen vectores especiales $\{|e_i\rangle\}$ (propios) donde sí pasa que

$$A|e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle$$

eigenvector, vector propio, e.V.

eigenvalor, valor propio, e.v.

- Al conjunto de e.v. de A se llama espectro.
- Si $|e\rangle$ es e.V. de A entonces $\overset{\in \mathbb{C}}{c}\,|e\rangle$ también

$$A|e\rangle = \lambda|e\rangle \Rightarrow A(\underbrace{c|e\rangle}_{|e'\rangle}) = \lambda(c|e\rangle) \Rightarrow A|e'\rangle = \lambda|e'\rangle$$

- Los operadores que nos interesan son hermitianos

- Teorema para operadores hermitianos

- Los eigenvalores de un operador hermitiano A son reales.
- Los vectores propios correspondientes a distintos e.v. son ortogonales.

Dem:

Consideren dos eigenvectores de A, $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ eigenvalores a y b.

$$A|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \qquad A|\beta\rangle = b|\beta\rangle$$

$$\downarrow \text{conjugado hermitiano}$$

$$\langle\beta|A^{\dagger} = \langle\beta|b^{*}$$

$$\downarrow A = A^{\dagger}$$

$$\langle\beta|A = \langle\beta|b^{*}$$

por $\langle\beta|$ por $|\alpha\rangle$

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = a\langle\beta|\alpha\rangle$$

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = b^{*}\langle\beta|\alpha\rangle$$

Calculando la diferencia

$$(a - b^{*})\langle\beta|\alpha\rangle = 0$$

- Veamos que los eigenvalores son reales:
  - Si $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son el mismo vector

$$(a-b^*)\langle\beta|\alpha\rangle=0 \Rightarrow (a-a^*)\langle\alpha|\alpha\rangle=0$$

Como $\langle\alpha|\alpha\rangle\neq 0 \Rightarrow a=a^*$

$\therefore$ Los eigenvalores son reales

- Por otro lado, si $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son vectores con eigenvalores distintos

$$(a-b)\langle\beta|\alpha\rangle=0 \Rightarrow \langle\beta|\alpha\rangle=0$$

pues $a-b\neq 0$

podemos olvidarnos del * porque ya sabemos que son reales

$\therefore$ $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son ortogonales.