Física Atómica y de Láseres

Semestre 2021-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Tarea 2
Entrega: 17/03/2021

Ej. 1: Momento angular y espín en ecuación de Dirac **15 Puntos**

Considerando el Hamiltoniano de Dirac para una partícula libre

$$H_{\text{Dirac}} = c\,\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2$$

Muestra que para el momento angular orbital y el espín, dados por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad ; \qquad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{1}$$

se cumplen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\left[\vec{L}, H_{\text{Dirac}}\right] = i\hbar c(\vec{\alpha} \times \vec{p}) \qquad ; \qquad \left[\vec{S}, H_{\text{Dirac}}\right] = -i\hbar c(\vec{\alpha} \times \vec{p}). \tag{2}$$

¿Qué significa esto para el conmutador $\left[\vec{L} + \vec{\vec{S}}, H_{\text{Dirac}}\right]$?

Nota: puedes asumir que los conmutadores para los operadores de posición y momento son los que ya conoces del caso no relativista.

Nota 2: Es recomendable usar el símbolo de Levi-Civita ε_{ijk} y la convención de suma de índices de Einstein para este cálculo.

Ej. 2: Estructura fina de hidrógeno **40 Puntos**

En clase vimos que el Hamiltoniano de estructura fina tiene la forma

$$H = m_e c^2 + \underbrace{\frac{p^2}{2m_e} + V(r)}_{H_0} - \underbrace{\frac{p^4}{8m_e^3 c^2}}_{H_1} + \underbrace{\frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}}_{H_{SO}} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{8m_e^2 c^2} \nabla^2 V(r)}_{H_D}$$

En este ejercicio calcularás la corrección total a la energía debido a estos términos del Hamiltoniano usando teoría de perturbaciones de primer orden.

a. Muestra que la corrección debido a la variación de la masa con la velocidad se puede escribir como

$$\Delta E_1 = \langle nlsjm_j | H_1 | nlsjm_j \rangle = \frac{m_e c^2 Z^4 \alpha^4}{2n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right).$$

Nota: puedes dar por hecho los valores de $\langle 1/r \rangle$ y $\langle 1/r^2 \rangle$.

b. Muestra que la corrección debido a la interacción espín-órbita H_{SO} para el caso $l \neq 0$ se puede escribir como

$$\Delta E_{SO} = \langle nlsjm_j | H_{SO} | nlsjm_j \rangle = \frac{m_e c^2 Z^4 \alpha^4}{4l(l+\frac{1}{2})(l+1)n^3} \begin{cases} l & \text{si} \quad j = l + \frac{1}{2} \\ -l-1 & \text{si} \quad j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

¿Cuánto vale ΔE_{SO} para el caso $l = 0$?

c. ¿Para cuáles eigenfunciones el término de Darwin resultará en una corrección

$$\Delta E_D = \langle nlsjm_j | H_D | nlsjm_j \rangle$$

distinta de cero? Para este caso, muestra que

$$\Delta E_D = \frac{m_e c^2 Z^4 \alpha^4}{2n^3}.$$

d. Muestra que tanto para $l = 0$ como para $l \neq 0$ se tiene que

$$\Delta E_1 + \Delta E_{SO} + \Delta E_D = \frac{m_e c^2 Z^4 \alpha^4}{2n^3} \left[\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right].$$

Al agregar los términos restantes del Hamiltoniano de estructura fina al cálculo perturbativo encontramos que

$$E_{n,j} = m_e c^2 \left(1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} + \frac{Z^4 \alpha^4}{2n^3} \left[\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right] \right).$$

¿De cuáles números cuánticos depende la energía y de cuáles es independiente?

Ej. 3: Diagonalización de $\vec{L} \cdot \vec{S}$ **20 Puntos**

En clase discutimos que el operador $\vec{L} \cdot \vec{S}$ se puede diagonalizar fácilmente usando la base $|l\, s\, j\, m_j\rangle$. Sin embargo, también hablamos de que es posible tratar el problema de la diagonalización de este operador usando la base $|l\, m_l\, s\, m_s\rangle$. Escribe un programa que, para valores arbitrarios dados de l y s, encuentre los eigenvalores del operador $\vec{L} \cdot \vec{S}$. Compara los egienvalores obtenidos con este programa con los que se obtienen usando la base $|l\, s\, j\, m_j\rangle$.