

Mecánica Cuántica
Semestre 2020-2
Prof: Asaf Paris Mandoki
Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez



Tarea 6
Entrega: 12/06/2020

Ejercicio 1: Distinguibilidad de partículas idénticas

25 Puntos

En clase discutimos que, para partículas indistinguibles el vector de estado debe ser simétrico o anti-simétrico ante el intercambio de etiquetas de partículas. En este ejercicio mostrarás que aunque se trate de partículas del mismo tipo, si éstas se encuentran muy separadas la simetrización de la función de onda no es necesaria.

La parte espacial para un sistema de dos partículas idénticas puede escribirse como

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_A(\mathbf{x}_1)\phi_B(\mathbf{x}_2) \pm \phi_A(\mathbf{x}_2)\phi_B(\mathbf{x}_1)],$$

donde el signo depende de si la parte espacial de la función de onda debe ser simétrica o anti-simétrica.

- Muestra que esta función es simétrica o anti-simétrica dependiendo del signo elegido.
- Calcula la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula 1 en \mathbf{x}_1 y a la partícula 2 en \mathbf{x}_2 .
- Muestra que si $\phi_A(\mathbf{x})$ es una función que sólo es distinta de cero en una region A y $\phi_B(\mathbf{x})$ sólo es distinta de cero en B , donde A y B son conjuntos ajenos entonces

$$\int_C \int_C |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 d^3x_1 d^3x_2 = \int_C \int_C |\phi_A(\mathbf{x}_1)|^2 |\phi_B(\mathbf{x}_2)|^2 d^3x_1 d^3x_2.$$

siempre que $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$.

Esto significa que si describimos de electrones distantes, con traslape de función de onda despreciable, no es necesario antisimetrizar la función de onda. Esto es bastante útil pues al describir al átomo de hidrógeno no necesitamos tomar en cuenta el resto de los electrones del universo para encontrar un estado anti-simétrico.

Ejercicio 2: Oscilador anarmónico

25 Puntos

Considera el hamiltoniano de oscilador armónico

$$H_0 = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

con eigenvalores $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ y eigenvectores $|\phi_n\rangle$. Este oscilador está sometido a una perturbación de la forma

$$W = \lambda\hbar\omega X^3.$$

- a) Escribe W en términos de a y a^\dagger y $N = a^\dagger a$.
- b) Encuentra cuáles elementos de matriz $\langle \phi_i | W | \phi_j \rangle$ de W son distintos de cero.
- c) Para el nivel n , calcula la corrección de la energía hasta segundo orden en λ debido a esta perturbación.
- d) Calcula la corrección a primer orden en λ para el eigenvector $|\phi_n\rangle$.

Ejercicio 3: Sistema de dos niveles

25 Puntos

Considerar el hamiltoniano H_0 y la perturbación W dados por

$$H_0 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad W = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Responda las siguientes preguntas (puedes auxiliarte con la computadora):

1. ¿Cuáles son los eigenvalores y egienvectores de H_0 ?
2. ¿Cuáles son los eigenvalores de $H_0 + W$ de acuerdo a la teoría de perturbaciones de primer y segundo orden?
3. ¿Cuáles son los eigenvalores exactos de $H_0 + W$?
4. Graficar **por computadora** los eigenvalores obtenidos en los incisos anteriores en función de Δ para distintos valores reales de Ω de tal forma que sea fácil comparar la solución exacta y la de teoría de perturbaciones (i.e. ponlas en la misma gráfica). ¿En qué región la solución por teoría de perturbaciones se aproxima bien a la solución exacta?

Ejercicio 4: Estado base de hidrógeno

25 Puntos

Para calcular estado base de hidrógeno usando el método variacional considera funciones de onda $\phi_\alpha(\mathbf{r})$ esféricamente simétricas cuya dependencia radial está dada por

$$\begin{cases} \phi_\alpha(r) = C(1 - \frac{r}{\alpha}) & r \leq \alpha \\ \phi_\alpha(r) = 0 & r > \alpha \end{cases}$$

con C una constante de normalización y α un parámetro variacional.

- a) Calcula $\mathcal{E}(\alpha) = \frac{\langle \phi_\alpha | H | \phi_\alpha \rangle}{\langle \phi_\alpha | \phi_\alpha \rangle}$. Escribe el valor esperado de la energía cinética en términos de $\nabla \phi_\alpha$ para evitar las funciones delta que aparecerían en $\nabla^2 \phi_\alpha$ por discontinuidades en $\nabla \phi_\alpha$. (i.e. calcula $\nabla \cdot (f \nabla g)$ e integra sobre todo el espacio para encontrar que $\int f \nabla^2 g dV = - \int \nabla f \cdot \nabla g dV$).
- b) Encuentra el valor óptimo de α denotado por α_0 y compáralo con el radio de Bohr.
- c) Compara el valor obtenido para la aproximación de la energía del estado base con el valor obtenido con la solución analítica exacta.