

Mecánica Cuántica
Semestre 2020-2
Prof: Asaf Paris Mandoki
Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez



Tarea 4
Entrega: 29/04/2020

Ejercicio 1: Operadores para $j = 1/2$ **10 Puntos**

Encuentra la representación matricial de los operadores J_x, J_y, J_z, J^2, J_+ y J_- en la base $\{|j = 1/2, m = +1/2\rangle, |j = 1/2, m = -1/2\rangle\}$.

Ejercicio 2: Valores esperados de para $j = 1$ **20 Puntos**

Considera un sistema de momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados está generado por la base $\{|1, +1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de eigenvectores comunes a J^2 y J_z de la forma $|j, m\rangle$. Si el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \alpha |1, 1\rangle + \beta |1, 0\rangle + \gamma |1, -1\rangle,$$

con α, β y γ números complejos:

- Calcula el valor esperado $\langle \mathbf{J} \rangle$ en términos de α, β y γ .
- Encuentra una expresión para los valores esperados $\langle J_x^2 \rangle, \langle J_y^2 \rangle$ y $\langle J_z^2 \rangle$ en términos de α, β y γ .

Ejercicio 3: Relaciones de conmutación **20 Puntos**

Siguiendo la notación de suma de Einstein donde se suma sobre los índices repetidos podemos escribir las componentes cartesianas de $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ como $L_k = \varepsilon_{ijk} R_i P_j$ con ε_{ijk} el símbolo de Levi-Civita. Muestra las siguientes relaciones de conmutación:

- $[L_i, R_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} R_k$
- $[L_i, P_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} P_k$
- $[L_i, P^2] = [L_i, R^2] = [L_i, \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}] = 0$

Ejercicio 4: Cambio de eje de cuantización **20 Puntos**

Considera un sistema físico arbitrario cuyo espacio de estados de 4 dimensiones se genera por los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z para $|j, m_z\rangle$ para $j = 0 \text{ o } 1$.

- Escribe los eigenvectores comunes a J^2 y J_x denotados por $|j, m_x\rangle$ en términos de los $|j, m_z\rangle$.

2. Para el estado

$$|\psi\rangle = \alpha |j = 1, m_z = 1\rangle + \beta |j = 1, m_z = 0\rangle + \gamma |j = 1, m_z = -1\rangle + \delta |j = 0, m_z = 0\rangle$$

- I ¿Cuál es la probabilidad de obtener los resultados $2\hbar^2$ y \hbar respectivamente al medir J^2 y J_x simultáneamente?
- II Calcula el valor promedio de J_z cuando el sistema está en el estado $|\psi\rangle$.
- III ¿Cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener al medir J_z si el sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle$?
- IV Repite los incisos 2II y 2III, pero ahora para J_x .
- V Repite los incisos 2II y 2III, pero ahora para J_z^2 .

Ejercicio 5: Teorema Hellman-Feynman y observables de H

20 Puntos

El Teorema de Hellman-Feynman es útil para calcular observables para el átomo de hidrógeno. Éste teorema dice que si tenemos un Hamiltoniano $H(\lambda)$ que depende de un parámetro real λ y un eigenvector normalizado $|\psi(\lambda)\rangle$ de $H(\lambda)$ con eigenvalor $E(\lambda)$ entonces

$$\frac{d}{d\lambda} E(\lambda) = \langle \psi(\lambda) | \frac{d}{d\lambda} H(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle.$$

a Demuestra este teorema. (Hint: calcula la derivada de $H(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle$ respecto a λ y multiplica por $\langle \psi(\lambda) |$.)

Una manera de calcular valores esperado como $\langle 1/r \rangle$ y $\langle 1/r^2 \rangle$ para el átomo de hidrógeno es calcular las integrales $\int R_{nl}(r) \frac{1}{r} R_{nl}(r) r^2 dr$ y $\int R_{nl}(r) \frac{1}{r^2} R_{nl}(r) r^2 dr$ respectivamente. El Teorema de Hellman-Feynman nos ofrece una alternativa ingeniosa a este cálculo. Considerando la ecuación radial para las funciones de onda, ésta tiene un Hamiltoniano de la forma

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

donde notamos que tenemos un término proporcional a $1/r$ y otro a $1/r^2$.

b Derivando H_r respecto a e vemos que podemos aislar el término $1/r$. Usa esto, el teorema de Hellman-Feynman y los eigenvalores conocidos de hidrógeno para obtener una expresión para $\langle 1/r \rangle$ cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano.

c Calcula $\langle \frac{1}{r^2} \rangle$ cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano usando el mismo método. En este caso es necesario derivar respecto a ℓ y recordar que $n = \ell + k$, donde k era una constante por lo que $\frac{dn}{d\ell} = 1$.

Nota: en el planteamiento original de la ecuación e y ℓ eran parámetros fijos. Este método se aprovecha de considerarlos como variables.

Ejercicio 6: Desviación RMS en momento angular

10 Puntos

Considerando un eigenestado de momento angular arbitrario $|\ell, m\rangle$. Encuentra:

$$\langle L_x \rangle, \langle L_y \rangle, \langle L_z \rangle, \langle L_x^2 \rangle, \langle L_y^2 \rangle, \langle L_z^2 \rangle, \Delta L_x, \Delta L_y, \Delta L_z.$$