Física Atómica y Materia Condensada

Semestre 2019-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Tarea 4
Entrega: 25 abril 2019

Ejercicio 1 : Átomo de dos niveles fuera de resonancia **25 Puntos**

En clase encontramos las ecuaciones diferenciales para las componentes del vector de estado $|\psi(t)\rangle = c_g(t)\,|g\rangle + \tilde{c}_e(t)\,|e\rangle$ para el átomo de dos niveles. Éstas tienen la forma

$$\dot{c}_g = -i\frac{\Omega}{2}\tilde{c}_e$$
$$\dot{\tilde{c}}_e = -i\frac{\Omega}{2}c_g + i\delta\tilde{c}_e,$$

donde $\delta = \omega - \omega_0$. En la página del curso puedes encontrar un programa que resuelve numéricamente el caso resonante ($\delta = 0$) de este problema.

a. Modifica ese programa o escribe uno propio para graficar $P_e(t) = c_e^*(t)c_e(t)$ y $P_g(t) = c_g^*(t)c_g(t)$ para $\delta = 0, \Omega, 5\Omega, 10\Omega$ y $P_e(0) = 0$. Haz las gráficas de tal modo que te permitan comprar fácilmente entre los distintos casos. Escoge una escala de tiempo razonable que te permita observar varios periodos de oscilación. Es importante que la gráfica sea clara.

b. ¿Qué diferencia hay entre caso fuera de resonancia respecto al caso resonante?

Nota: si escribes tu propio programa, puedes usar el lenguaje que prefieras y puedes auxiliarte de bibliotecas que ya contengan las rutinas de integración de ecuaciones diferenciales.

Ejercicio 2 : Aproximación de onda rotante **25 Puntos**

Para obtener el Hamiltoniano del átomo de dos niveles discutido en clase

$$\tilde{H} = -\hbar\delta\,|e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma + \sigma^\dagger\right),$$

hicimos la aproximación de onda rotante (RWA) y posteriormente la transformación al marco rotante. En este ejercicio explorarás las consecuencias de haber hecho esta aproximación. El Hamiltoniano del que partimos antes de hacer la RWA y la transformación al marco rotante tiene la forma

$$H = \hbar\omega_0\,|e\rangle\langle e| + \hbar\Omega\left(\sigma + \sigma^\dagger\right)\cos\omega t, \tag{1}$$

donde $\sigma = |g\rangle\langle e|$ y $\sigma^\dagger = |e\rangle\langle g|$.

a. Encuentra el sistema de ecuaciones diferenciales que resulta de la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano de la Ecuación 1 al definir

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_g(t) \\ c_e(t) \end{pmatrix}.$$

b. La RWA es buena siempre y cuando $\delta, \Omega \ll \omega, \omega_0$. Modificando tu programa del inciso anterior, ilustra un caso donde la RWA sea buena y otro caso donde sea una mala aproximación. Para esto compara la solución obtenida con la RWA del ejercicio anterior y la solución del sistema que planteaste en el inciso anterior. Puedes limitarte al caso resonante ($\delta = 0$).

c. En clase aplicamos la aproximación de onda rotante a el Hamiltoniano de la Ecuación 1 antes de hacer la transformación al marco rotante

$$\tilde{H} = UHU^\dagger + i\hbar(\partial_t U)U^\dagger$$

con

$$U = \exp\left(i\omega t \,|e\rangle\langle e|\right).$$

Para este inciso, aplica esta transformación al Hamiltoniano de la Ecuación 1 haciendo la sustitución $\cos\omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$. ¿Cuáles son los términos del Hamiltoniano resultante que despreciamos al hacer la aproximación de onda rotante?

Ejercicio 3 : Átomo de dos niveles con decaimiento **25 Puntos**

Para tratar la posibilidad de el átomo realice un decaimiento espontáneo es necesario tratar el sistema de dos niveles usando matrices de densidad. Las ecuaciones de evolución obtenidas en clase para este caso fueron

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{ee} &= +i\frac{\Omega}{2}(\rho_{eg} - \rho_{ge}) - \Gamma\rho_{ee} \\
\dot{\rho}_{ge} &= -i\frac{\Omega}{2}(\rho_{ee} - \rho_{gg}) - i\delta\rho_{ge} - \frac{\Gamma}{2}\rho_{ge} \\
\dot{\rho}_{eg} &= +i\frac{\Omega}{2}(\rho_{ee} - \rho_{gg}) + i\delta\rho_{eg} - \frac{\Gamma}{2}\rho_{eg} \\
\dot{\rho}_{gg} &= -i\frac{\Omega}{2}(\rho_{eg} - \rho_{ge}) + \Gamma\rho_{ee},
\end{aligned}$$

donde Γ es la tasa de decaimiento espontáneo.

a. Modifica tu programa para tratar este sistema de 4 ecuaciones diferenciales. Grafica la probabilidad de estar en el estado excitado $\rho_{ee}(t)$ para $\delta = 0$, $\Gamma = 0, 0.2\Omega, 0.5\Omega, \Omega, 2\Omega$ y para $\delta = 3\Omega$, $\Gamma = 0.2\Omega$. Haz las gráficas de tal modo que te permitan comprar fácilmente entre los distintos casos (i.e. que sean la misma gráfica). Escoge una escala de tiempo razonable que te permita observar varios periodos de oscilación. Es importante que la gráfica sea clara.

b. ¿Qué pasa con la amplitud de las oscilaciones para valores cada vez más grandes de Γ? ¿Puedes explicar por qué ocurre esto?